

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

ДЕЙНЕКА БОГДАН ВАДИМОВИЧ

Допускається до захисту:  
В.о. завідувача кафедри  
прикладної математики та  
кібербезпеки, доцент  
\_\_\_\_\_ Оксана ДАНИЛЬЧУК  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ІТО У МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ**

Спеціальність 111 Прикладна математика

Кваліфікаційна (магістерська) робота

Науковий керівник:  
Оксана ДАНИЛЬЧУК,  
к.пед.н., доцент, доцент кафедри  
прикладної математики та  
кібербезпеки

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Оцінка : \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

(бали/за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)

Голова ЕК: \_\_\_\_\_

(підпис)

## АНОТАЦІЯ

**Дейнека Б.В.** Застосування рівняння Іто у моделях фінансових ринків. Спеціальність 113 «Прикладна математика», Освітня програма «Прикладна математика». Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2023.

У кваліфікаційній досліджено пошук та застосування рівняння Іто у моделях фінансових ринків

Ключові слова: рівняння Іто, рівновага за Нешем, гра середнього поля.

42 с., 11 рис., 23 джерел

**Deineka B.** Applications of the Ito equation in financial market models. Specialty 113 «Applied Mathematics», Programme «Applied Mathematics». Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2023.

The qualification paper investigates search and application of the Ito equation in financial market models.

Keywords: Ito equation, Nash equilibrium, mean field game.

42 pp., 11 figures, 23 source

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>4</b>
<b>РОЗДІЛ 1. РІВНЯННЯ ІТО.....</b>	<b>6</b>
<b>1.1 Броунівський рух .....</b>	<b>6</b>
<b>1.2 Рівняння Ito .....</b>	<b>11</b>
<b>1.3 Лемма Ito .....</b>	<b>14</b>
<b>1.4 Породжуючий вінеровський процес.....</b>	<b>17</b>
<b>РОЗДІЛ 2. ФІНАНСОВІ РИНКИ.....</b>	<b>23</b>
<b>2.1 Основні відомості про фінансові ринки.....</b>	<b>23</b>
<b>2.2 Волатильність ринків.....</b>	<b>26</b>
<b>2.3 Деякі емпіричні явища на фінансових ринках .....</b>	<b>28</b>
<b>2.4 Формування портфелю. ....</b>	<b>32</b>
<b>РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДЛЯ ІТО-ДИFUЗНОГО НЕПОВНОГО РИНКУ .....</b>	<b>38</b>
<b>3.1 Неповний ринок.....</b>	<b>38</b>
<b>3.2 Задача N-гравців.....</b>	<b>39</b>
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>44</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>45</b>



## ВСТУП

*Актуальність:* дана робота має значення у контексті прийняття най-ефективніших рішень на фінансових ринках, де можливість великого різноманіття варіантів грає ключову роль.

*Мета:* основною метою цього дослідження є виявлення та аналіз актуальних стохастичних моделей, використовуваних для опису фінансових ринків.

*Об'єкт:* Вінерівський процес – математичний об'єкт, який застосовується для моделювання випадкових змін.

*Предмет:* предметом дослідження є рівняння Іто та його взаємозв'язок з породжуючим Вінерівським процесом, які використовуються для математичного опису руху цін на фінансових ринках.

*Завдання:* полягає у створенні моделей фінансових ринків за допомогою рівняння Іто для кращого розуміння та передбачення їхньої поведінки.

*Наукова новизна:* Новизною даного дослідження є використання теорії ігор для моделювання фінансових ринків, що дозволяє досліджувати їхню поведінку та взаємодію між учасниками з урахуванням стратегій та впливу на ціни фінансових інструментів.

Знакові роботи Мертона (1969, 1971) породили величезну літературу, що розширила проблему оптимального інвестування в різних напрямках і використовувала різні техніки. Для досліджень в ситуації повноти ринку варто звернутись: до Пліску (1986), Кокса та Хуанга (1989) або Карацаса, Лехочки та Шріва (1987), для обмежених портфельів - до Цвітаніча та Карацаса (1992) чи Заріфопулу (1994), для витрат на транзакції - до Константінідеса та Магілла (1976), Девіса та Нормана (1990), Шріва та Сонера (1994), Даффі та Сана (1990) або Акіана, Менальді та Сулема (1995), для податків – до Константінідеса (1983), Жуані, Кьоля та Тузі (1997, 1999), Деймона, Спетта та Чжана (2001) або Бен Тахара, Сонера та Тузі (2008а, 2008б), для загальних неповних ринків - до Хе та Пірсона (1991а,б), Карацаса, Лехочки, Шріва та Шу (1991), Крамкова та Шахермайера (1999, 2003) або Крамкова та Сірбу (2006).

В першому розділі буде розглянуто основні поняття, які пояснюють природу та зміст рівняння Іто, а також лему Іто, головний результат, який дозволяє використовувати це рівняння в моделюванні фінансових ринків.

В другому розділі буде висвітлено основні поняття функціонування фінансових ринків, наведено деякі емпіричні дані стосовно властивостей ринків та продемонстровано задачу формування портфелю.

В третьому розділі продемонстровано застосування теорії ігор для Іто-дифузних моделей.



## РОЗДІЛ 1. РІВНЯННЯ ІТО

### 1.1 Броунівський рух

В основі моделей, які надалі будуть розглядатися в даній роботі, лежить поняття броунівського руху. Більш детально питання взаємо'зв'язку броунівського руху і фінансових ринків можна дізнатись у [1, 2, 4].

Рух Броуна - це неупорядкований, хаотичний рух мікроскопічних частинок у рідині чи газі, викликаний постійними випадковими ударами молекул речовини з усіх боків. Це явище було відкрито ботаніком Робертом Броуном у 1827 році. Пізніше Альберт Ейнштейн у 1905 році сформулював теорію, що пояснює цей рух.

Суть Броунівського руху полягає у випадковому, хаотичному переміщенні дуже малих часток у рідині чи газі під впливом безлічі молекулярних ударів, що викликають непередбачувані зміни їхнього розташування. Цей рух був спостережений у різних середовищах, де речовини перебувають у рідинній або газоподібній формі.

Історично Броун виявив цей рух під час спостережень спор плаунів у воді. Він помітив, що частинки, які були помітні під мікроскопом, постійно рухалися і хаотично змінювали своє положення. Це спостереження відіграло важливу роль у розвитку наукових уявлень про будову речовини та її поведінку на молекулярному рівні.

У фінансовій сфері Броунівський рух став однією з теоретичних основ для розуміння непередбачуваності цінних змін на ринках. Ціни на фінансових ринках також можуть мати непередбачувані коливання, аналогічні хаотичному русі частинок у рідині. Ця аналогія використовується для пояснення різних аспектів коливань цін та їхньої непередбачуваності у фінансових ринках.

Найпростішим її описом буде модель адитивного незалежного дискретного випадкового блукання. Всі чотири прикметники в назві моделі відображають базові властивості процесу.

Припустимо, що початкове значення  $x = x_0$ . Далі  $x$  відчуває  $t = 1, 2, \dots$  випадкових незалежних гауссових змін ("поштовхів"), кожне з волатильністю  $\sigma$ . В результаті  $x$  виявиться рівним накопиченої сумі таких змін:

$$x_t = x_0 + \sigma \cdot (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t), \quad (1.1)$$

де  $\varepsilon_i \square N(0,1)$  - гаусові числа з нульовим середнім і одиничною дисперсією.

Індекс  $t$  поки є цілим числом, проте в подальшому ми перейдемо до границі неперервного часу.

Зручно ввести дискретну змінну Вінера:

$$W_t = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t = \varepsilon \cdot \sqrt{t} \quad (1.2)$$

Друга рівність ми записали, оскільки сума гауссових чисел знову дорівнює гауссовому числу з волатильністю  $\sqrt{t}$ . Випадкові числа, як з індексами  $\varepsilon_i$ , так і без них  $\varepsilon$ , передбачаються нормованими:  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ ,  $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$ , тобто як  $\varepsilon \square N(0,1)$ . Модель (1.2) тепер виглядає наступним чином:  $x_t = x_0 + \sigma \cdot W_t$ .

Змоделюємо таке блукання за допомогою комп'ютера. Починаючи з  $x_0 = 0$ , будемо генерувати випадкові числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  і будувати їх накопичену суму:

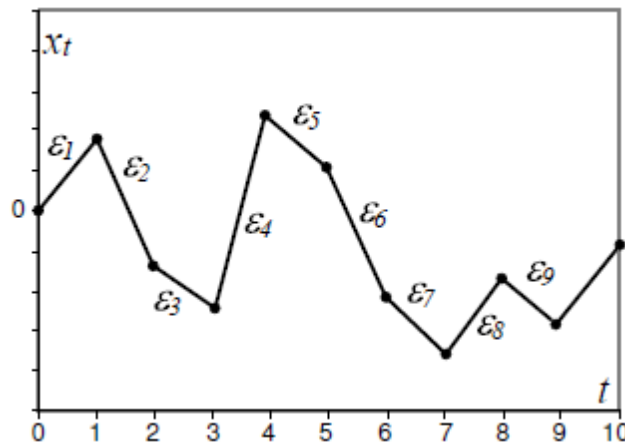


Рисунок 1

Оскільки зміни будуть кожен раз новими, то по-різному будуть протікати і блукання траєкторії  $x_t = x(t)$  (див. рис. 2). Різні реалізації процесу блукання

перетинають вертикальну пряму  $t = const$  в тих чи інших значеннях  $x$ . Сукупність усіх цих чисел є випадковою величиною.

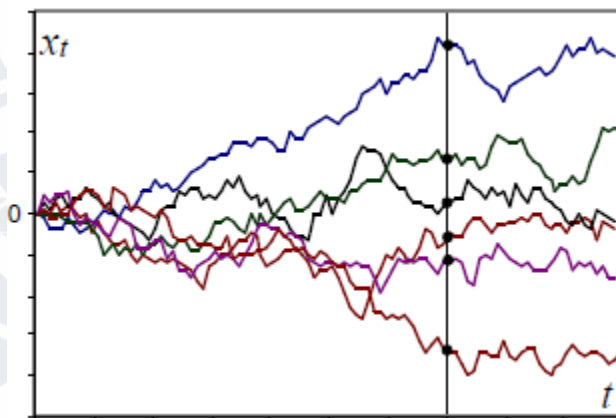


Рисунок 2

Тому, кажучи про процес  $x(t)$ , ми маємо на увазі, що в *даний момент часу*  $x = x(t)$  має певний розподіл  $P(x)$ . В деякий інший момент часу розподіл може виявитися іншим. Тому щільність ймовірності  $P(x,t)$ , середнє  $\bar{x}(t)$  і волатильність  $\sigma(t)$  будуть функціями часу.

Волатильність адитивного блукання збільшується, як  $\sqrt{t}$ . Це наочно видно на 2-му рисунку з декількома реалізаціями  $x_t$ . Їх "пучок" поступово розширюється. В результаті невизначеність майбутнього значення збільшується. Ми можемо виявити  $x_t$  досить далеко від початкового значення  $x_0 = 0$ . Це також проілюстровано на 3-му рисунку, де представлені щільності ймовірності, які з плином часу поступово "розпливаються".



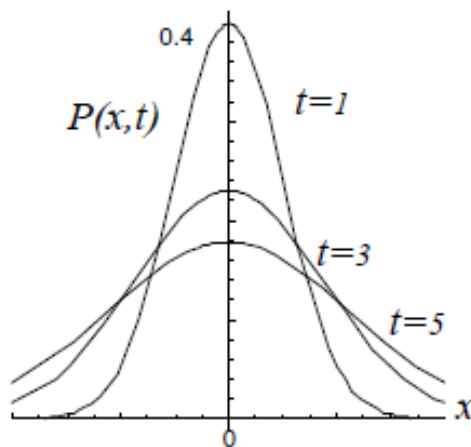


Рисунок 3

Блукаючі траєкторії починаються з певного початкового значення  $x_0 = x(t_0)$  в момент часу  $t_0$ . Тому, кажучи про ймовірність, ми маємо справу з умовною щільністю  $P(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$ . Поки моменти часу  $t$  і  $t_0$  є цілими числами, відповідними номером стрибка  $\varepsilon_k$  на черговому етапі.

Важливо розуміти, що  $x_t = x(t)$  не є конкретною траєкторією. Це одночасна сукупність всіх можливих траєкторій випадкового процесу. Аналогічно, випадкове число  $x$  не має на увазі конкретного значення, а позначає всі можливі реалізації, що підлягають деякому розподілу  $P(x)$ . Імовірність отримати на  $t$ -му кроці визначається можливостями всіх змін  $\varepsilon_i$ . Так, дискретний вінеровський процес визначається щільністю ймовірності:

$$P(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t) = P(\varepsilon_1) \cdot \dots \cdot P(\varepsilon_t),$$

де рівність відображає незалежність всіх  $\varepsilon_i$ . Таким чином,  $W_t$  - фактично, багатовимірна випадкова величина.

Звернемо ще раз увагу на зміст запису:  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t = \varepsilon \cdot \sqrt{t}$ . Припустимо, що в процесі моделювання ми генеруємо  $t$  незалежних гауссових чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  і додаємо їх. Результат буде мати такі ж статистичні властивості, як одне гауссове число  $\varepsilon$  з одиничною волатильністю, помножене на фактор  $\sqrt{t}$ . При обчисленні властивостей накопиченої суми цілком достатньо користуватися величиною  $\varepsilon$ , а не спільної

щільністю  $P(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t)$ . Зокрема, якщо ми шукаємо середнє значення, в якому бере участь сума гауссових чисел, його обчислення можна спростити, використовуючи тільки одне випадкове число. Однак, якщо нас цікавить зв'язок сум, одержуваних в різні моменти часу, то необхідні деякі хитрощі. Розглянемо їх докладніше.

Для порівняння процесу блукання з самим собою в різні моменти часу його необхідно розбивати на відрізки часу, що не перекриваються. Нехай процес триває  $s$  кроків, а потім ще  $t-s$ . Порівняємо властивості траєкторій в "моменти часу"  $s$  і  $t$  ( $s < t$ ):

$$W_s = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s, W_t = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s + \varepsilon_{s+1} + \dots + \varepsilon_t$$

Віднімаючи рівняння, отримуємо суму випадкових чисел:

$$W_t - W_s = \varepsilon_{s+1} + \dots + \varepsilon_t = \varepsilon \cdot \sqrt{t-s} = W_{t-s}$$

Друга рівність є відображенням того, що сумарна волатильність  $t-s$  незалежних гауссових доданків буде дорівнювати  $\sqrt{t-s}$ . Фактично,  $W_s$  і  $W_t$  можна представити у вигляді:

$$W_s = \varepsilon_a \sqrt{s} \quad W_t = \varepsilon_a \sqrt{s} + \varepsilon_b \cdot \sqrt{t-s}, \quad (1.3)$$

де  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  як і всюди, - незалежні гауссові числа з нульовим середнім і одиничною дисперсією. Перше з них еквівалентне накопиченій сумі початкових збільшень, а друге відповідає незалежним від подальшим приростам.

Тепер можна знайти коваріацію між  $W_t$  і  $W_s$ . Оскільки  $\bar{W}_t = 0$ , то:

$$\text{cov}(s, t) = \langle W_s, W_t \rangle = \langle \varepsilon_a \sqrt{s} \cdot (\varepsilon_a \sqrt{s} + \varepsilon_b \cdot \sqrt{t-s}) \rangle = s$$

в силу того, що  $\langle \varepsilon_a^2 \rangle = 1$  і  $\langle \varepsilon_a \varepsilon_b \rangle = 0$ . Таким чином, коваріація залежить тільки від найменшого числа  $s = \min(s, t)$ , що представляє собою тривалість загальної для  $W_s$  і  $W_t$  історії. Для прояснення сенсу цього результату запишемо регресійну пряму між  $W_s$  і  $W_t$ . Їх волатильності рівні  $\sqrt{s}$  і  $\sqrt{t}$ , а середні - нулю, тому:

$$\frac{W_t}{\sqrt{t}} = \frac{\text{cov}(s, t)}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \cdot \frac{W_s}{\sqrt{s}} + \frac{\xi}{\sqrt{t}} \Rightarrow W_t = W_s + \xi$$



Таким чином, якщо відомо, що в момент часу  $s$  сума дорівнює  $W_s$ , то найкращим прогнозом майбутнього значення  $W_t$  буде вже відоме  $W_s$ . З (1.3) випливає, що лінійна регресійна модель виявляється в даному випадку точною. При цьому її "шумом" виступають накопичені після моменту часу  $s$  зміни:

$$\xi = \varepsilon_{s+1} + \dots + \varepsilon_t = \varepsilon_b \sqrt{t-s}$$

## 1.2 Рівняння Іто

Розглянемо дискретну модель блукання, в якій, крім випадкових поштовхів  $dx = a(x,t)dt$ , на кожному кроці відбувається постійний зсув  $x$  на величину  $\mu_0$ . Через  $n$  таких кроків результуюче значення дорівнюватиме:

$$x = x_0 + \mu_0 \cdot n + \sigma_0 \sqrt{n} \cdot \varepsilon \quad (1.4)$$

Параметр  $\mu_0$  називають "зсувом" процесу. Якщо  $\mu_0 > 0$ , то траєкторія поступово (в середньому) буде зрушуватися вгору, інакше - вниз. Накопичене стохастична зміна  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = \varepsilon \sqrt{n}$  пропорційна гауссовій змінній  $\varepsilon \in N(0,1)$  з нульовим середнім і одиничною дисперсією.

Нехай тривалість кожного кроку -  $\Delta t$ , і протягом часу  $t - t_0$  їх кількість становить  $n = (t - t_0) / \Delta t$ . Позначимо дисперсію за одиницю часу через  $\sigma^2 = \sigma_0^2 / \Delta t$ , а зсув  $\mu = \mu_0 / \Delta t$ . В результаті  $x$  стає випадковою функцією, яку можна записати в наступному вигляді:

$$x(t) = x(t_0) + \mu \cdot (t - t_0) + \sigma \sqrt{t - t_0} \cdot \varepsilon \quad (1.5)$$

Залежно від значення випадкового гаусового числа  $\varepsilon$  буде виходити те чи інше значення  $x$  в момент часу  $t$ . Таким чином, процес  $x(t)$  має нормальний розподіл з максимумом, що зрушується зі швидкістю  $\mu$ , і з шириною, що збільшується з часом пропорційно кореню  $\sqrt{t - t_0}$ .



Розглянемо тепер зміну  $dx = x(t) - x(t_0)$  за нескінченно малий інтервал  $dt = t - t_0$ . В цьому випадку з (1.5) слідує:

$$t_1 = t_0 + \Delta t, \quad (1.6)$$

де введено формальне позначення  $\delta W$ .

На відміну від звичайних диференціальних рівнянь виду  $dx = a(x,t)dt$ , подібне рівняння містить нескінченно малу зміну за часом в степені 1/2. Щоб підкреслити цю незвичайність, ми використовуємо символ " $\delta$ ", а не " $d$ ". Процес, який підпорядковується рівнянню (1.6), називається безперервним вінеровським процесом.

Загальні процеси Іто є "деформацію" простого вінеровського блукання за допомогою функцій  $a(x,t)$  і  $b(x,t)$ . Припустимо, що зсув  $\mu$  і волатильність  $\sigma$  - це функції часу, які можуть також залежати від значення  $x$ :

$$dx = a(x,t) \cdot dt + b(x,t) \cdot \delta W, \quad (1.7)$$

де  $\delta W = \varepsilon \sqrt{dt}$  - нескінченно малий вінеровський "шум", а  $\varepsilon \square N(0,1)$ .

Функція називається коефіцієнтом зносу  $a(x,t)$ , а  $b(x,t)$  - коефіцієнтом волатильності, квадрат якого називають дифузиею.

Рівняння Іто (1.7) дозволяє легко моделювати тимчасову динаміку довільного стохастичного процесу за допомогою ітераційної схеми

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k) \Delta t + b(x_k, t_k) \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_k \quad (1.8)$$

Для цього вибирається малий інтервал часу  $\Delta t$  і початкове значення  $x_0$ . Потім генерується нормально розподілене випадкове  $\varepsilon_1$  число і обчислюється наступне значення  $x_1$ . Після чого  $x_1$  підставляється на місце  $x_0$ , час зсувається  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . В результаті виходить послідовність випадкових чисел  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Відповідний графік має характерну фрактальну зламність, типову для динаміки цін фінансових

інструментів або блукаючої броунівської частинки. Зауважимо, що на кожній ітерації генерується нове випадкове число.

Збіжність ітераційної процедури (1.8) має одну особливість. Розв'язуючи звичайне диференціальне рівняння  $dx = a(x,t)dt$  в різницях  $x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k)\Delta t$ , ми припускаємо, що при заданих початкових умовах  $x_0 = x(t_0)$  розв'язок в момент часу  $t$  буде виходити приблизно таким самим, прагнучи до деякої границі при зменшенні часового кроку  $\Delta t \rightarrow 0$ . Однак для стохастичних рівнянь це абсолютно не так! Який би малий інтервал ми не вибрали, за рахунок випадкових чисел будуть виходити різні траєкторії, віддалені один від одного досить далеко.

Збіжність алгоритму (1.8) означає, що при зменшенні  $\Delta t$  повинні до певного границі прагнути середнє значення, волатильність і функція розподілу ймовірностей випадкового процесу.

Зсув  $a(x,t)$  і волатильність  $b(x,t)$  мають простий сенс. Якщо  $x$  в момент часу  $t_0$  дорівнює  $x_0$ , то середні значення першої та другої степені його зміни через нескінченно близький інтервал  $\Delta t \rightarrow 0$  дорівнюватимуть:

$$\frac{\langle x - x_0 \rangle}{\Delta t} = a(x_0, t_0) \quad \langle \langle x - x_0 \rangle^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^k \cdot P(x_0, t_0 \Rightarrow x, t) dx, \quad (1.9)$$

де усереднення проводиться за умови  $x_0 = x(t_0)$ .

Це твердження означає використання умовної ймовірності при обчисленні середнього:

$$\langle \langle x - x_0 \rangle^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^k \cdot P(x_0, t_0 \Rightarrow x, t) dx$$

Моменти часу  $t$  і  $t_0$  явно вказують, коли відбувається спостереження  $x = f(x_0, t_0, t, \varepsilon)$  і  $x_0$ .

Клас процесів, властивості яких повністю визначаються тільки нескінченно малими локальними змінами першого і другого порядку, називаються *дифузними*.



Будемо записувати розв'язки стохастичних рівнянь за допомогою скалярної випадкової величини  $\varepsilon$ . Важливо чітко розуміти сенс такої символіки. Нехай в початковий момент часу  $t_0$  нам відомо, що  $x = x_0$ . Після цього  $x$  починає змінюватися  $x = x(t)$ . У кожен фіксований момент часу  $t$  величина  $x$  випадкова. За допомогою того чи іншого функціонального перетворення можна виразити випадкову величину з одним розподілом через випадкову величину з іншим. Тому:

$$x = f(x_0, t_0, t, \varepsilon) \quad (1.10)$$

А це означає, що випадкова величина  $x$  в момент часу  $t$  виражається, наприклад, через гауссову випадкову змінну  $\varepsilon$ , а, отже, щільність ймовірності  $P(x_0, t_0 \Rightarrow x, t)$  можна отримати деяким перетворенням з нормального розподілу. За допомогою (1.7) легко обчислюються різноманітні середні випадкового процесу, оскільки властивості  $\varepsilon$  добре відомі.

Таким чином, в довільний фіксований момент часу  $x = x(t)$  - це випадкова величина, властивості якої визначаються за допомогою  $\varepsilon$  і значення  $t$ . Час змінюється, і змінюються її властивості. В результаті випадкова величина  $x$  перетворюється в процес.

### 1.3 Лемма Іто

Нехай процес  $x(t)$  підпорядковується рівнянню Іто. Розглянемо звичайну гладку функцію  $F(x, t)$ . Якщо замість  $x$  в неї підставити  $x(t)$ , то  $F(t) = F(x(t), t)$  стане випадковим процесом. Покажемо, що він також підпорядковується дифузному рівнянню Іто:

$$dF = A(x, t)dt + B(x, t)\delta W \quad (1.11)$$

з  $x = G(F, t)$ , де  $G$  - обернена до функція. Для цього необхідно визначити функції зсуву  $A$  і волатильності  $B$ , а також переконатися, що моменти більш високих порядків дорівнюють нулю.



Розкладемо в ряд Тейлора  $F(x, t) = F(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)$  в околі початкового фіксованого значення  $x_0$  по невеликих  $\Delta x$  і  $\Delta t$ :

$$F(x, t) = F(x_0, t_0) + \frac{\partial F}{\partial x_0} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_0} \Delta t + \dots, \quad (1.12)$$

де всі похідні справа обчислені в точці  $(x_0, t_0)$ .

Для ряду залишений член другого порядку малості по  $\Delta x$ . Ми можемо записати в наступному вигляді:

$$(\Delta x)^2 = (a_0 \Delta t + b_0 \varepsilon \sqrt{\Delta t} + \dots)^2 = b_0^2 \varepsilon^2 \Delta t + \dots, \quad (1.13)$$

де залишено головне наближення по  $\Delta t$ . Таким чином, якщо в початковий момент часу  $t_0$  функція дорівнює детермінованому числу  $F(x_0, t_0)$ , то через малий проміжок часу, в залежності від значення  $\varepsilon$ , це буде випадкова величина виду:

$$F(x, t) = F(x_0, t_0) + \frac{\partial F}{\partial x_0} (a_0 \Delta t + b_0 \varepsilon \sqrt{\Delta t}) + \frac{b_0^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \varepsilon^2 \Delta t + \dots + \frac{\partial F}{\partial t_0} \Delta t + \dots \quad (1.14)$$

За визначенням (1.9) коефіцієнт зсуву в межі дорівнює:

$$A(x_0, t_0) = \frac{\langle F - F(x_0, t_0) \rangle}{\Delta t} = a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{b_0^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + \frac{\partial F}{\partial t_0}$$

Аналогічно, для коефіцієнта дифузії:

$$B^2(x_0, t_0) = b_0^2 \left( \frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2$$

Для моментів більш високих порядків в границі  $\Delta t \rightarrow 0$  виходить нуль. Таким чином, це дійсно дифузний процес.

Вище згадувалося, що для запису стохастичного диференціального рівняння деякого процесу необхідно обчислити умовні середні його зміни першого і другого порядку. При цьому слід переконатися, що моменти більш високих порядків при прямують до нуля. Якщо цього не відбувається, то процес не є дифузним і не може

бути записаний у формі Іто (1.11). Тому необхідна повна перевірка "дифузності", що проведена вище.

Вважаючи рівняння (1.12) першим обчисленням в нескінченній ітераційній схемі, ми можемо записати: Сума доданків виду  $\varepsilon^2 \Delta t$  призводить до такого ж детермінованого результату, як і відсутність  $\varepsilon^2$ . Тому можна покласти  $\varepsilon^2 \rightarrow 1$ .

Оскільки початковий момент був обраний довільним чином, запишемо диференціал функції в формі Іто за допомогою нескінченно малої вінеровської змінної:

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{b^2(x,t)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + b(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} \delta W \quad (1.15)$$

Це співвідношення називається **леммою Іто**. Воно грає дуже важливу роль в теорії випадкових процесів.

Звернемо увагу, що під час відсутності стохастики повний диференціал функції, в яку підставили рішення рівняння, має вигляд:

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} \right) dt \quad (1.16)$$

На відміну від цього співвідношення, в детерміновану частину леми Іто проникають функція дифузії і друга похідна по  $x$ . Відбувається це, як ми бачили, завдяки корню  $\sqrt{dt}$ . Це, в свою чергу, пов'язано з властивостями простого адитивного блукання, яке є локальним наближенням будь-якого процесу Іто.

Для вінеровського рівняння  $dx = \mu dt + \sigma \delta W$  з постійним зсувом і волатильністю диференціал квадрата траєкторії  $y = x^2$ , відповідно до (1.15), задовольняє нелінійне рівняння Іто:

$$d(x^2) = (2\mu x + \sigma^2) dt + 2\sigma x \delta W \Rightarrow dy = (2\mu\sqrt{y} + \sigma^2) dt + 2\sigma\sqrt{y} \delta W$$

Діючи в зворотному напрямку, за допомогою відповідної заміни та леми Іто можна зводити одні рівняння до інших, розв'язки яких нам відомі.

#### 1.4 Породжуючий вінеровський процес

Стохастичне диференціальне рівняння містить в якості шуму  $\delta W$  зміни вінеровського процесу  $W_t$ . В результаті: кожна вибіркова траєкторія вінеровського блукання  $W_t$  повністю визначає вибірку траєкторію довільного стохастичного рівняння з шумом  $\delta W$ .

Навіть в тих випадках, коли ми не можемо в явному вигляді записати розв'язки рівняння у вигляді простої функції  $x_t = f(t, W_t)$ , передбачається її існування. Якщо у нас є кілька випадкових процесів, рівняння яких містять *один і той же* стохастичний шум, то вони повинні бути між собою *скорельованні*. Розглянемо приклад:

$$\begin{cases} dx = f(t)\delta W \\ dy = g(t)\delta W \end{cases} \quad (1.17)$$

Розв'язки кожного рівняння можуть бути записані за допомогою гауссових величин:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \left[ \int_{t_0}^t s^2(\tau) d\tau \right]^{1/2} \cdot \varepsilon \quad (1.18).$$

Однак, незважаючи на однакову вінеровську змінну  $\delta W$ , в розв'язках повинна стояти різна  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum f_{i-1} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} = x_0 + F(t) \cdot \varepsilon \\ y &= y_0 + \sum g_{j-1} \varepsilon_j \sqrt{\Delta t} = y_0 + G(t) \cdot \eta \\ F^2(t) &= \int_{t_0}^t f^2(\tau) d\tau \quad G^2(t) = \int_{t_0}^t g^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$



На кожній ітерації, в обох сумах стоять однакові випадкові числа  $\varepsilon_k$ . Однак так як вони множаться на різні коефіцієнти  $f_i$  і  $g_j$ , результуючі гаусові числа будуть скорельовані:

$$F(t)G(t) \cdot \langle \varepsilon \eta \rangle = \sum_{i,j=1} f_{i-1} g_{j-1} \langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle \Delta t = \int_{t_0}^t f(\tau) g(\tau) d\tau$$

так як  $\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$  відмінно від нуля тільки при  $i = j$ . Таким чином:

$$\langle \varepsilon \eta \rangle = \rho(t) = \frac{1}{F(t)G(t)} \int_{t_0}^t f(\tau) g(\tau) d\tau \neq 1 \quad (1.19)$$

Зауважимо, що в загальному випадку залежить  $\langle \varepsilon \eta \rangle$  від часу.

Розглянемо конкретне застосування цих формул на прикладі *процесу Орнштейна-Уленбека*:

$$dx = -\beta(x - \alpha)dt + \sigma \delta W$$

Перейдемо за допомогою леми Іто до процесу:

$$y(t) = F(t, x) = e^{\beta t} (x - \alpha)$$

$$dy = \sigma e^{\beta t} \delta W \Rightarrow y(t) = y_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{e^{2\beta t} - 1} \cdot \eta$$

де,  $\eta \square N(0,1)$  а  $y_0 = x_0 - \alpha$ .

Тому розв'язок для  $x$  має вигляд

( $\beta > 0$ ):

$$x(t) = \alpha + (x_0 - \alpha)e^{-\beta t} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{1 - e^{-2\beta t}} \cdot \eta$$

Якщо ми цікавимося властивостями цього процесу, даного розв'язку цілком достатньо. Однак, якщо ми хочемо прояснити його зв'язок з породжую вiнеровським процесом, необхідно записати:

$$\langle \varepsilon \eta \rangle = \rho = \sqrt{\frac{2(1 - e^{-\beta t})}{\beta t(1 + e^{-\beta t})}} \quad W_t = \varepsilon \sqrt{t},$$

де ми скористалися (1.16) з  $f(t) = 1$  ;  $g(t) = \sigma e^{\beta t}$ .

Так як  $\varepsilon$  і  $\eta$  - скорельовані гауссові числа, для обчислення моментів довільних порядків зручно перейти до пари незалежних гауссових величин:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \quad \eta = \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2$$

В результаті:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \eta^2 \rangle = 1 \quad \langle \varepsilon \eta \rangle = \rho \quad \langle \varepsilon^2 \eta^2 \rangle = 1 + 2\rho^2 \quad \text{і т.д.}$$

Тепер ми можемо обчислити будь-які статистики, в яких беруть участь і процес Орнштейна-Уленбека  $x$ , і породжуючий його вiнеровський процес  $W_t$ :

$$\langle W_t \cdot x_t \rangle = \frac{\sigma \sqrt{t}}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{1 - e^{-2\beta t}} \langle \varepsilon \eta \rangle = \frac{\sigma}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$$

Якщо нас цікавлять передбачувальні можливості породжуючого процесу, необхідно записати розв'язок зі зсувом:

$$x_{t+\tau} = \alpha + (x_t - \alpha) e^{-\beta \tau} + \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{1 - e^{-2\beta \tau}} \cdot \eta'$$

і обчислити:

$$\langle W_t \cdot x_{t+\tau} \rangle = \langle W_t \cdot x_t \rangle e^{-\beta \tau} = \frac{\sigma}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$$

так як на  $\eta'$  інтервалі  $[t \dots t + \tau]$  не залежить від вiнеровського процесу в момент  $t$ .

Розглянемо ще одну задачу для двох процесів з однаковим шумом:

$$\begin{cases} dx = \delta W \\ dy = f(x,t)\delta W \end{cases}$$

Якщо  $x_0 = x(0) = 0$ , то  $x(t) = W_t$  - це вінерівський процес, що надає рівняння для  $y$  не тільки зміни  $\delta W$ , але і накопичене значення  $W_t$ , від якого залежить *амплітуда* шуму.

Будемо, як звичайно, використовувати ітераційний метод:

$$x_i = x_0 + \sum_{j=1}^i \varepsilon_j \sqrt{\Delta t}$$

$$y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, t_i) \varepsilon_{i+1} \sqrt{\Delta t}$$

У розв'язку  $y_n$  для величини  $x_i$  міститься сума гауссових змінних по включно  $\varepsilon_i$ . Вони не залежать від  $\varepsilon_{i+1}$ , тому  $\langle y_n \rangle = y_0$ . Аналогічно обчислюється дисперсія другого процесу:

$$\langle (y_n - y_0)^2 \rangle = \sum_{i,j=0}^{n-1} \langle f(x_i, t_i) f(x_j, t_j) \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{j+1} \rangle \Delta t$$

Цю суму необхідно розбити на три частини, коли індекс  $i$  менше  $j$ , більше, і дорівнює:

$$\sum_{i,j} = \sum_{i < j} + \sum_{i > j} + \sum_{i=j}$$

Перша і друга суми дорівнюють нулю, оскільки вони містять члени типу  $\langle f(x_1, t_1) f(x_2, t_2) \varepsilon_2 \varepsilon_3 \rangle$ . Величина  $\varepsilon_3$  не залежить від всіх інших випадкових чисел, середнє розбивається на твір середніх і виявляється рівним нулю  $\langle \varepsilon_3 \rangle = 0$ . В результаті нульове значення має остання сума зі складовими типу  $\langle f^2(x_1, t_1) \varepsilon_2^2 \rangle = \langle f^2(x_1, t_1) \rangle \langle \varepsilon_2^2 \rangle$ .

Тому для дисперсії маємо такий вираз:



$$\sigma^2(t) = \langle (y(t) - y_0)^2 \rangle = \int_{t_0}^t \langle f^2(x_0 + \varepsilon\sqrt{\tau}, \tau) \rangle d\tau, \quad (1.20)$$

де в явному вигляді підставлено розв'язок для  $x$ .

Таким чином, усереднюючи з гауссовою щільністю ймовірності підінтегральної функції і обчислюючи інтеграл від звичайної функції часу, ми отримуємо значення дисперсії випадкового процесу. Підкреслимо, що спочатку відбувається усереднення, і тільки після цього проводиться інтегрування.

Системи рівнянь з однаковим шумом дозволять прояснити ще одну важливу особливість стохастичної математики. Розглянемо наступний приклад з початковими умовами  $x_0 = x(0)$  і  $y_0 = y(0)$ :

$$\begin{cases} dx = \delta W \\ dy = x\delta W \end{cases} \quad (1.21)$$

Може з'явитися спокуса розділити одне рівняння на друге і проінтегрувати звичайне диференціальне рівняння:

$$dy = xdx \Rightarrow y - y_0 = \frac{x^2 - x_0^2}{2} \quad (1.22)$$

Якщо так можна, то розв'язок повинен залишатися на детермінованій кривій. Однак насправді це не так! Справа в тому, що, хоча стохастичний член скоротився, диференціали  $dx$ ,  $dy$  як і раніше є зміною випадкових функцій, для яких не застосовуються звичайні правила інтегрування. Для подібних операцій служить лема Іто.

Розв'язок системи (1.21) насправді має вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + W \\ y = y_0 + x_0 W + \frac{1}{2}(W^2 - t) \end{cases}$$

Дійсно, розглядаючи  $y = F(t, W)$ , як функцію часу і  $W$ , ми можемо скористатися леммою Іто. При цьому  $dW = \delta W$ , тому зсув дорівнює нулю, а волатильність - одиниці:

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial W^2} \right) dt + \frac{\partial y}{\partial W} \delta W = (x_0 + W) \delta W = x \delta W$$

що збігається з другим рівнянням системи (1.21).

Таким чином, необхідно пам'ятати, що диференціали типу  $dx$  не є звичайними "малими" приросту функції  $x(t)$ . Це випадкові величини. Не можна під диференціал "як зазвичай" "затягувати" функції:  $2x dx \neq d(x^2)$ . Слід також пам'ятати, що *диференціальні стохастичні рівняння - це лише символічний запис неперервної границі ітераційної схеми.*

Ніколи не буде зайвим перевірити отриманий результат за допомогою чисельного моделювання на комп'ютері. Те, що при цьому складно зробити граничний перехід, не повинно зупиняти. В остаточному підсумку, більшість реальних випадкових процесів в природі на певному часовому масштабі є дискретними!

## РОЗДІЛ 2. ФІНАНСОВІ РИНКИ

В цьому розділі зібрані деякі приклади застосування стохастичних методів до фінансових ринків і економіки. Волатильний характер цін та економічних індикаторів призводить до того, що динаміка відповідних систем є відчутно стохастичною, і тому член  $\delta W$  відіграє суттєву роль в рівняннях Іто.

Спочатку ми зробимо короткий екскурс до фінансових інструментів та їх емпіричних властивостей. Дослідження статистичних явищ на фінансових ринках стали основою для вивчення методів застосування стохастичних рівнянь. Наприклад у [3] Мандельброт досліджує фрактальність цінових рядів на фінансових ринках. Знакові роботи Едгара Петерса [33,34] розглядають аналіз ринків з точки зору фрактальності та використання хаосу в інвестуванні. Також варто зазначити дослідження [35] структури ринку та динаміки торгівлі на основі емпіричних даних.

### 2.1 Основні відомості про фінансові ринки

Досить умовно фінансові ринки можна розділити на чотири основні групи:

- **Ринок акцій** (*stock market*), або фондовий ринок, являє собою біржову і позабіржову торгівлю корпоративними правами. Акціонерні товариства за допомогою проведення додаткових емісій акцій можуть залучати кошти для розвитку свого бізнесу. Молоді компанії отримують стартовий капітал, продавши частину статутного фонду (IPO). Акціонери компанії розраховують на те, що вартість їх акцій з часом підвищиться, а частина прибутку буде виплачуватися як дивіденди.
- **Ринок облігацій** (*bond market*) дозволяє компаніям і державі отримувати грошові кошти у інвесторів під фіксований відсоток. Процентна ставка, що виникає на ринку облігацій, визначає вартість грошей, що спрямовуються на розширення бізнесу компанії. Випуск облігацій - це більш дорогий спосіб залучення коштів, ніж емісія акцій, однак при цьому не відбувається розмивання капіталу вже існуючих інвесторів. Покупець облігації отримує



фіксований дохід, за винятком випадків банкрутства компанії або оголошення дефолту державою.

- **Валютний ринок** (*foreign exchange market*) являє собою співтовариство банків і інших фінансових організацій, що здійснюють операції з конвертації однієї валюти в іншу. Валютний ринок працює цілодобово. Три основні групи учасників ринку - це імпортери, які купують іноземну валюту, і експортери, які її продають. Крім них, в сучасному світі вагому роль відіграють фінансові компанії, які змінюють склад своїх портфелів, переходячи з ринку однієї країни на ринок іншої. Їх вплив на курси валют дуже велике.
- **Товарні ринки** (*commodity market*) - це організовані майданчики з торгівлі стандартизованими видами товарів. До таких належать нафту, золото, срібло, зерно, кава і т.п. Кожен вид товару має чіткий стандарт якості, за яким стежить біржа. Саме стандартизація перетворює товарний контракт в фінансовий інструмент з властивостями, які притаманні всім іншим фінансовим активам.

На фінансових ринках торгуються як "спотові" фінансові інструменти = активи (акції, валюта і т.д.), так і похідні від них - деривативи (ф'ючерси та опціони).

**Ф'ючерс** (*futures*) - це контракт (зобов'язання) на покупку або продаж активу в певний момент в майбутньому. Якщо акція сьогодні коштує 100 (ціна на споті), то два контрагента можуть домовитися про те, що один купить, а інший, відповідно, продасть цю акцію за ціною, наприклад, 110 (ф'ючерсна ціна) з поставкою через один рік. Іноді реальна передача акції може не відбуватися. Тоді ф'ючерсний контракт стає різновидом пари, при якому одна сторона сплачує іншій суму, рівну різниці між ф'ючерсної та фактичною ціною акції на момент виконання контракту. Наприклад, через рік ціна акції виявляється рівною 90. У цьому випадку покупець повинен буде виплатити продавцеві чисту різницю в  $20 = 110 - 90$ .

Гарантом подібних угод виступає клірингова палата біржі. Для укладення ф'ючерсного контракту і продавець, і покупець повинні перерахувати на свій біржовий рахунок певну суму (початкову маржу). Саме вона використовується кліринговою палатою для виплати доходу стороні, яка "виграла пари". Залежно від

волатильності ціни активу, що лежить в основі ф'ючерсу, початкова маржа може становити близько 5-10 % від його поточної вартості. Якщо покупець купив ф'ючерсний контракт (посів довгу позицію), а продавець, відповідно, продав ф'ючерс (посів коротку позицію), то в подальшому вони не взаємодіють один з одним. Порядок всіх розрахунків на себе бере біржа. Ф'ючерсна ціна в результаті торгів щодня змінюється. Якщо, при несприятливому її русі, позиція починає приносити збиток, необхідно доносити кошти на біржовий рахунок. У будь-який момент до дати поставки відкрита позиція може бути "закрита" шляхом покупки або продажу зустрічного контракту.

**Опціон** - це контракт, який дає його власнику право купити (опціони *call* = колл) або продати (опціони *put* = пут) деякий актив за обумовленою ціною виконання (*strike price*) в певний час в майбутньому (дата закінчення). На відміну від ф'ючерсу, опціон - це право, а не зобов'язання, тому покупець від нього може відмовитися. Той же, хто продав (виписав) опціон, бере на себе зобов'язання виконати його на вимогу власника опціону. У разі європейського опціону дата реалізації права фіксована. Для американського, власник може скористатися своїм правом у будь-який момент до дати закінчення. Обидва види опціонів можуть торгуватися в будь-якій країні.

Ключовим параметром фінансового інструменту є його ціна  $r = \mu + \sigma\varepsilon$ . Саме її коливання служать відмінною областю застосування випадкових процесів і джерелом прибутку або збитку для учасників ринку. Зміна ціни або прибутковість фінансового активу можна вимірювати за допомогою логарифмічного відношення цін на початку і кінці часового періоду:

$$r_t = \ln \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

В якості періоду може виступати день, година, хвилина і т.д.

Найпростішою моделлю динаміки ціни є логарифмічне блукання. Припустимо, що за день відносна зміна ціни становить

$$r_t = \ln \frac{x_t}{x_{t-1}}$$



Тоді через  $n$  днів, починаючи з ціни  $x_0$ , ми прийдемо до значення:

$$x_t = x_{t-1} \exp(r_t) = x_0 \exp(r_1 + \dots + r_t)$$

Ціна при подібному блукання завжди залишається позитивною. Якщо випадкові числа  $r = \mu + \sigma \varepsilon$  є незалежними гауссовими величинами із середнім  $\mu$  і волатильністю  $\sigma$ , то середнє значення майбутньої ціни становить:

$$\langle x_t \rangle = x_0 e^{\mu + \sigma^2/2}$$

Ціна в середньому не буде змінюватися (мартингал), якщо прибутковість від'ємна:

$$\mu = -\sigma^2 / 2$$

Неперервним аналогом логарифмічного блукання буде процес такого вигляду:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW$$

В цьому випадку  $\bar{x}(t) = x_0$ , і якщо  $\mu = 0$ , то  $\bar{x}(t) = x_0$ .

Волатильність і середню прибутковість зазвичай вимірюють в річних величинах. Тому, якщо час  $t$  задано в долях року, то прибутковість за період буде дорівнювати  $\mu_t = \mu t$ , а волатильність  $\sigma_t = \sigma t$ .

При розгляді, наприклад, еволюції чисельності популяції стохастичний вплив буде важливою, але все ж поправкою до детермінованої динаміки. На фінансових ринках стохастика є головною особливістю системи, і волатильність зміни ціни зазвичай значно вище, ніж довгостроковий її зсув. Так, типове зростання фондового ринку становить близько  $\mu = 7\%$  в рік, тоді як річна волатильність  $\sigma = 16\%$  (в спокійні періоди).

## 2.2 Волатильність ринків

Це фундаментальне питання всієї фінансової теорії. Найпростіше пояснення, пов'язане с непрогнозованим впливом на ринки з боку зовнішніх чинників (економічні, політичні новини, звіти компаній і т.п.), - лише частина правди.



По-перше, ринки дуже часто неадекватно реагують на новини. Якщо вони внутрішньо готові до руху у відповідному напрямку, то будь-які, самі незначні події цей рух викличуть. І навпаки, іноді досить серйозні новини ніяк не позначаються на цінах. При цьому аналітики, журналісти, а слідом за ними учасники ринку примудряються повторювати абсолютно фантастичні пояснення того, чому чорне насправді є білим, і навпаки.

По-друге, новини бувають різними. Протягом тижня або навіть дня можуть приходити повідомлення з діаметрально протилежним позитивом. І тільки Ринок знає, на що він дійсно відреагує.

Волатильність може виникати через випадкових внутрішніх факторів. Іноді великі гравці переглядають склад своїх інвестиційних портфелів, йдуть з ринку або повертаються на нього. Однак ці події є відносно незначними і служать, скоріше, невеликим поштовхом для Ринку. Відгукнеться він на нього, задалегідь передбачити дуже складно. Нарешті, волатильність може бути властива динаміці самого Ринку, особливо якщо рівняння, що описують цю динаміку, є нелінійними і мають хаотичним режимом поведінки (т.зв. детермінований хаос).

Волатильність ринків - явище неминуче. Зрозуміло, що, якщо ціна весь час досить швидко росте, будь який купив цей інструмент отримає гарантований прибуток. Однак вічних фінансових двигунів не буває. Фінансові ринки, в кінцевому підсумку, є спільнотою розумних істот, об'єднання яких за допомогою синхронізуючого впливу цін та іншої інформації призводить до утворення дуже складної системи. Вона відображає психологію окремої людини і в той же час володіє власним унікальним поведінкою, часто неблагозвучно званим "психологією натовпу".

Ринки дуже суб'єктивні, забобонні, схильні до масових фобій і помилкам. Дуже часто помилкові економічні та фінансові теорії, прийняті всіма, стають цілком об'єктивними, впливаючи на ринок. При цьому не важливо, чи правильні теорії - важливо, чи вірять в них на даному етапі. Ця суб'єктивність і становить природу ринків.

## 2.3 Деякі емпіричні явища на фінансових ринках

**Фрактальність.** Якщо побудувати графіки динаміки цін на різних тимчасових інтервалах і закрити вісь часу, то навіть найдосвідченіший трейдер, швидше за все, не відрізняє місячний графік від хвилинного. Нижче наведено курс EUR до USD. На першому малюнку кожна точка є щоденним курсом, на другому - годинним, і на третьому - щохвилинним:



Рисунок 4

Фрактальність - це самоподібність об'єкта або процесу на різних масштабах. Такі безперервні стохастичні процеси, як броунівські блукання, автоматично мають властивість фрактальності.

**Відсутність пам'яті.** Якщо обчислити кореляційні коефіцієнти між зміною ціни вчора і сьогодні, ми отримаємо (в рамках статистичної похибки) нульове значення. Нижче в таблиці наведені автокорреляції щоденних дохідностей індексу S&P500 зі зсувом від одного до восьми днів:

період	$n$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$
1950-2006	14338	<b>0.09</b>	-0.02	-0.01	0.01	-0.02	-0.02	-0.03	0.01
1950-1959	2510	<b>0.09</b>	<b>-0.10</b>	-0.01	0.05	0.01	-0.02	-0.03	0.05
1960-1969	2489	<b>0.15</b>	-0.03	0.04	0.07	0.01	-0.01	0.03	0.04
1970-1979	2526	<b>0.25</b>	-0.01	0.02	0.00	-0.03	-0.06	-0.01	-0.01
1980-1994	3791	<b>0.08</b>	0.03	-0.01	-0.02	-0.01	-0.02	-0.04	-0.01
1995-2003	2267	-0.01	-0.03	-0.03	0.01	-0.05	-0.01	-0.04	0.01
2004-2006	775	-0.03	-0.08	0.02	-0.03	0.01	-0.01	-0.02	-0.04

Рисунок 5

Видно, що значення автокорреляцій дуже малі. Стандартна помилка їх обчислення за  $n$  спостереженнями дорівнює  $1/\sqrt{n}$ . З ймовірністю 0,68 відхилення вибіркової автокорреляції від істинної становить одну стандартну помилку, а з



ймовірністю  $0,96$  - дві. Жирним шрифтом виділенні значення, які можна статистично значимо вважати відмінними від нуля. Так, за весь період кореляція вчорашнього і сьогоднішнього зміни ціни, з точки зору формального статистичного підходу, має відмінне від нуля значення  $0,09 \pm 0,01$ . Однак цей результат пов'язаний з дійсно високою автокореляцією в минулому (1960-1980). В даний час значущою короткої пам'яті у ринку немає.

**Пам'ять волатильності.** На відміну від доходностей, між їх квадратами  $r_t^2$  або модулями  $|r_t|$  існують помітні автокорреляції. Можна розглядати автокоррелограми між різними мірами, що характеризують абсолютну величину зміни ціни, а не її знак. Це можуть бути волатильності, обчислені за невеликі інтервали часу  $\sigma_t$ , амплітуда розмаху ціни  $a = \ln H / L$ , де  $H$  - максимальне, а  $L$  - мінімальне значення за період, або комбіновані заходи, наприклад,  $v = a - |r| / 2$

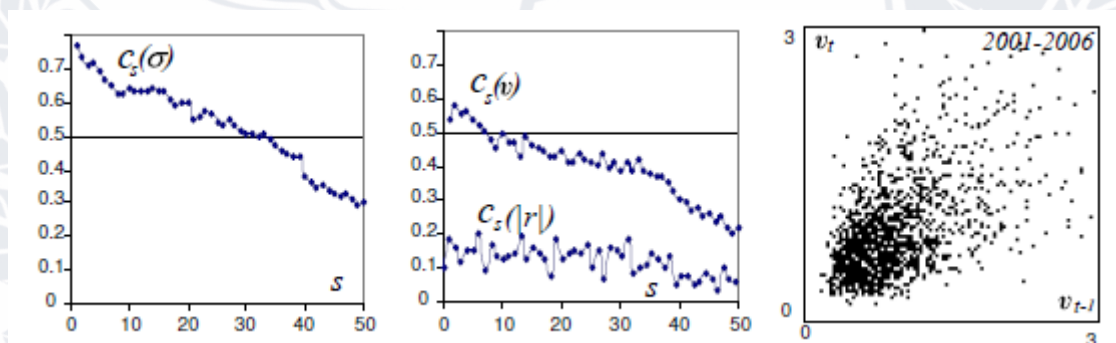


Рисунок 6

Вище наведені коррелограми для різних мір щоденної волатильності і точкова діаграма для двох послідовних днів, яка має характерну форму комети. В якості даних використовувався курс EUR проти USD за період 2004-2008 років.

**Не зовсім гауссовість.** Якщо вивчити властивості емпіричного розподілу для доходностей деякого фінансового інструменту, то воно, швидше за все, виявиться не гаусовим. Типовий розподіл виглядає наступним чином:



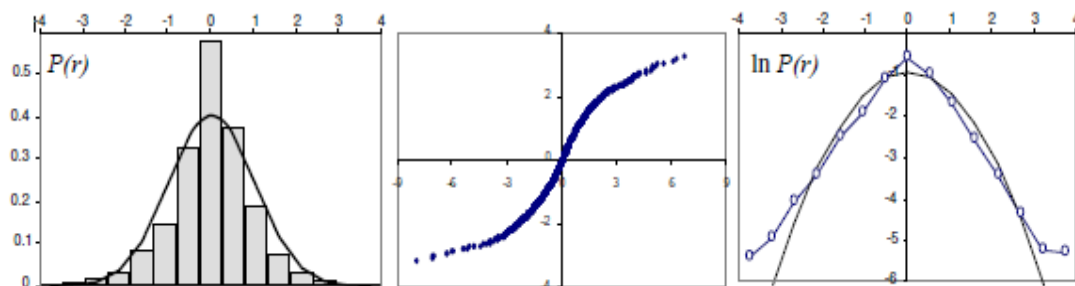


Рисунок 7

На першому малюнку приведена стандартна гістограма, а тонка лінія відповідає розподілу Гаусса. На третьому графіку та ж в логарифмічному масштабі. Другий графік є графіком нормальної ймовірності. Емпіричний розподіл зазвичай має помітний ексцес і асиметрію. Його хвости (асимптотичну поведінку щільності ймовірності) є "товстими", тобто лежать вище графіка нормального розподілу. В результаті істотні відхилення прибутковості від середнього значення відбуваються частіше, ніж в "нормальному випадку".

Крахи і мінікрахи. Одна з причин (або наслідків) негауссового розподілу ймовірностей дохідностей - це виникнення на ринку так званих крахів, що виявляються найчастіше в якості обвального падіння цін на один або декілька подібних фінансових активів.

Найбільше запам'ятовуються одноденні обвали. З початку 1987 р фондовий ринок Америки ріс прискореними темпами (близько 40 % річних). В результаті бульбашка нищівно лопнула. За один день, в понеділок 19-го жовтня 1987 року, індекс S & P500 обрушився більш ніж на 20 % (лівий малюнок):

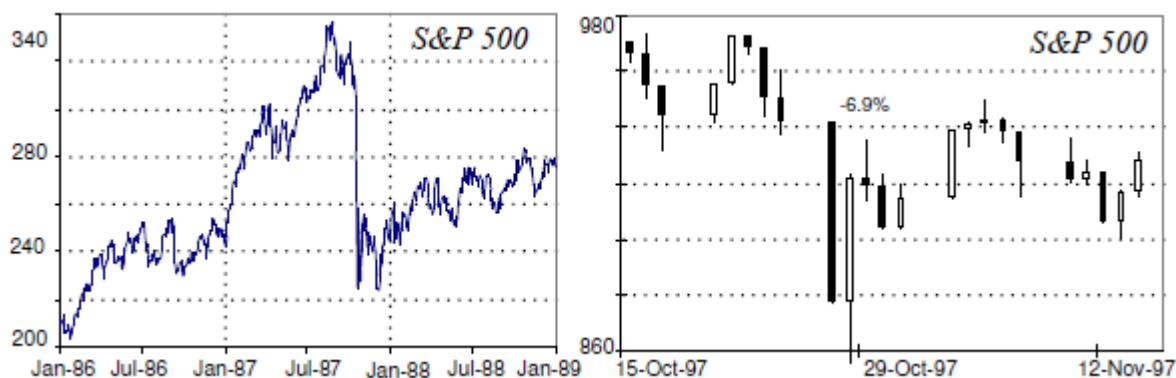


Рисунок 8

Події меншого масштабу, але все ж дуже неприємні, відбуваються на ринку досить часто. На правому малюнку наведено приклад "святкування" десятиліття жовтневого краху 1987-го.

**Скорельованність ринків.** Ціни фінансових інструментів мають сильно скорельованну динаміку. Якщо передбачити зміни ціни за два послідовних періоди дуже складно, то зміна цін різних активів за один інтервал часу пов'язані дуже тісно. Позитивні "настрої" протягом дня, швидше за все, приведуть до зростання акцій більшості компаній, і навпаки.

Нижче на малюнку представлена динаміка фондових індексів S & P500 (США) і FTSE (Великобританія) за період 1991-2007:

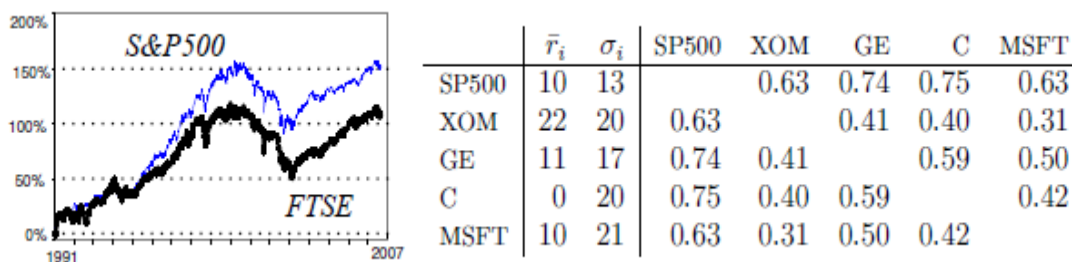


Рисунок 9

Добре видно синхронність їх поведінки. Праворуч від малюнка наведені кореляційні коефіцієнти щоденних змін цін акцій кількох найбільших американських компаній (період 2003-2007,  $n = 1258$ ) та їх річна прибутковість і волатильність.

**Нестационарність ринків.** Напевно, найбільш характерною властивістю ринків є їх нестационарність. Статистичні параметри випадкового блукання ціни змінюються з часом. Наприклад, під час обговорення "відсутності пам'яті" ми бачили, що перший автокореляційний коефіцієнт  $c_1 = cor(r_t, r_{t-1})$  з 1950 року зазнав помітну еволюцію.

Ще більш помітно нестационарність проявляється для волатильності ринку, яка характеризує ступінь його "нервозності". Розглянемо типові значення щоденних доходностей для ціни фінансового інструменту. Нижче зліва вони представлені у

вигляді стовпчиків (вгору  $r > 0$ , вниз -  $r < 0$ ). Для порівняння справа наведені стаціонарні випадкові числа з гаусовим розподілом:

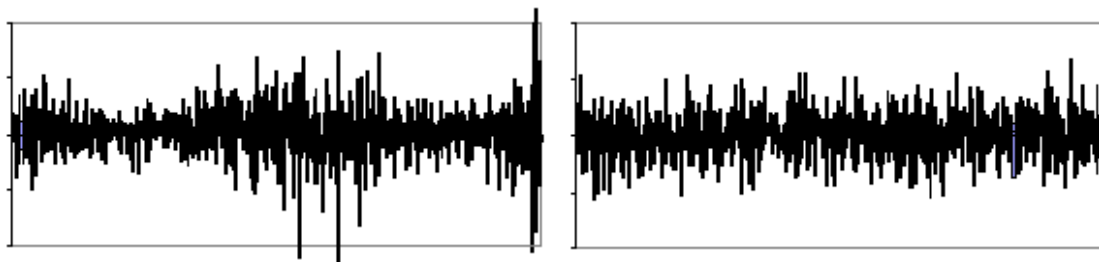


Рисунок 10

Видно, що "їжачок" прибутковості реальних цін значно менш однорідний. Періоди низької волатильності (маленькі стовпчики) чергуються зі значеннями високої волатильності. Залежність волатильності від часу можна відновлювати за допомогою різних методик. Нижче наведено приклад такого обчислення для індексу S & P500:

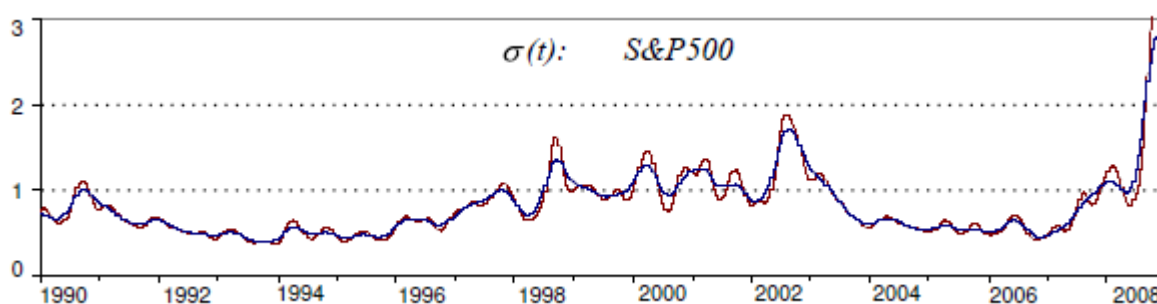


Рисунок 11

Видно, що змінюється показник в кілька разів.

Спостереження нестационарності волатильності дозволяє дати просте пояснення описаному вище ефекту пам'яті волатильності і негаусових розподілу. Акуратне виділення довгострокової динаміки повністю усуває пам'ять волатильності і істотно знижує негауссовість розподілу дохідностей.

## 2.4 Формування портфелю.

Нехай інвестор починає свою кар'єру з капіталу  $0$ . Він формує портфель з  $n$  акцій, ціни  $x_i(t)$  яких стохастичним чином змінюються з часом. Тому його капітал



також змінюється, як  $\Pi(t)$ . Зрозуміло, збагачення не є самоціллю, і за кожну одиницю часу  $dt$  він споживає частину капіталу, максимізуючи своє задоволення. Яка в цьому випадку оптимальна стратегія інвестування? Це завдання вивчали в 1969 р Роберт Мертон і Пол Самуельсон.

Якщо кількість акцій кожного виду в портфелі рівна  $N_i(t)$ , то зміна його вартості за малий інтервал часу після вилучення рівна:

$$d\Pi = \sum_{i=1}^n N_i(t) dx_i - c(t)\Pi(t)dt$$

Ми для простоти вважаємо, що споживання пропорційно капіталу. Мертон насправді довів це твердження.

Нехай ціни на акції підкорюються стаціонарному логарифмічному блуканню:

$$\frac{dx_i}{x_i} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \delta W_j$$

Де  $\mu_i$  - дохідності акцій, а матриця  $\sigma_{ij}$  визначає їх коваріації. В цьому розділі по повторюваним індексам підсумовування не передбачають, якщо це явно не вказано знаком суми. Підставляючи  $dx_i$  в рівняння портфеля і вводячи ваги  $w_i = N_i x_i / \Pi$  кожної акції, отримуємо нестационарне логарифмічне блукання:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = f(t)dt + s(t)\delta W \quad (2.1)$$

Зсув і волатильність портфеля визначаються співвідношеннями:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i(t) - c(t) \quad s^2(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) D_{ij} w_j(t)$$

де  $D = \sigma \cdot \sigma^T$  - коваріаційна матриця.

Перехід від декількох стохастичних змінних  $\delta W_i = \varepsilon_i \sqrt{dt}$  до однієї  $\delta W = \varepsilon \sqrt{dt}$  ми зробили стандартним чином:

$$\sum_{i,j=1}^n w_i(t) \sigma_{ij} \varepsilon_j(t) = s(t) \varepsilon \sqrt{dt}$$

Сума гауссових чисел - знову гауссове число, множник перед яким знаходиться після зведення в квадрат і усереднення.

Вага  $w_i(t)$  кожної акції в портфелі і питома споживання  $c(t)$  задаються інвестором. В результаті функції  $f(t)$  і  $s(t)$  в рівнянні (3.1) є фіксованими. Переходячи до  $\ln \Pi$  за допомогою леми Іто, маємо:

$$d \ln \Pi = \left[ f(t) - \frac{1}{2} s^2(t) \right] dt + s(t) \delta W$$

Звідки, скориставшись (1.15), отримуємо точний розв'язок:

$$\ln \frac{\Pi(t)}{\Pi_0} = \int_0^t \left[ f(\tau) - \frac{1}{2} s^2(\tau) \right] d\tau + \left[ \int_0^t s^2(\tau) d\tau \right]^{1/2} \cdot \varepsilon,$$

де, як зазвичай,  $\varepsilon$  - гауссова випадкова величина з  $\langle \varepsilon \rangle = 0$  і  $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$ .

Постійне вилучення сум  $v = c(t) \Pi(t)$  має для інвестора певної корисності  $U = U(v)$  (utility). Це поняття досить умоглядно, але дуже популярно в економічній літературі. Основні гіпотези теорії корисності полягають у тому, що 1) функція є опуклою, і 2) вона росте повільніше лінійної функції. Кожна додаткова одиниця благ (виражена в грошах), в будь-якому випадку, приносить задоволення. Але поступово, зі збільшенням  $v$ , додаткової корисності виходить все менше, і зростання функції  $U(v)$  сповільнюється. Часто функцію корисності вибирають в степеневому вигляді  $U(v) = v^\gamma$ , з параметром  $0 < \gamma < 1$  або в логарифмічному  $U(v) = \ln v$ . Розглянемо варіант степеневі залежності.

Обчислимо середнє значення корисності  $U_t = \langle U(v) \rangle = c^\gamma(t) \langle \Pi^\gamma(t) \rangle$  в момент часу  $t$ .



$$U_t = \prod_0^\gamma c^\gamma(t) e^{\gamma \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \int_0^t s^2(\tau) d\tau}$$

Підставляючи явний вигляд функцій  $f(t)$  і  $s(t)$ , маємо:

$$U_t = \prod_0^\gamma c^\gamma(t) \exp \int_0^t \gamma \left[ \sum_{i=1}^n \mu_i w_i(\tau) - c(\tau) - \frac{1-\gamma}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\tau) D_{ij} w_j(\tau) \right] d\tau$$

Вибір певних стратегій інвестування  $w_i(\tau)$  і вилучення (споживання)  $c(\tau)$  протягом часу  $\tau = [0..t]$  призводить до деякого середнього значення корисності в момент часу  $t$ . Однак отримання максимального сьогочасної корисності також не є головною метою інвестора. Так в чому ж сенс?

За Мертона і Самуельсона, інвестор повинен максимізувати сумарну дисконтовану корисність, одержувану протягом всього свого життя. І якщо він не закінчений егоїст, додаткову корисність він отримує від залишкового капіталу, переданого у спадок. Математично це може бути виражено в наступному вигляді:

$$\int_0^T e^{-\rho t} U_t d\tau + \theta e^{-\rho T} U_T + \int_0^T \lambda(\tau) \left[ 1 - \sum_{i=1}^n w_i(\tau) \right] d\tau = \max \quad (2.2)$$

Перший інтеграл підсумовує все одержувані від вилучень середні корисності  $U_t$ . При цьому параметр  $\rho$  аналогічний ставці дисконтування грошових потоків. Чим пізніше отримано задоволення, тим менше його внесок в сенс життя. Другий доданок є корисністю завещаного інвестором капіталу (bequest valuation function) в фінальний момент його життя  $T$ . Параметр  $\theta$  характеризує ступінь його неегоїстичності, і зазвичай передбачається невеликим  $0 < \theta \leq 1$ . Останній доданок  $\lambda(\tau)$  з'являється відповідно до методу множників Лагранжа. Ми шукаємо екстремум при додатковому вимозі рівності суми ваг одиниці в кожен момент часу.

Знайдемо екстремум функціоналу (3.2) за функціями  $\lambda(\tau)$  і  $w_k(t)$  :



$$\begin{cases} 1 = \sum_{i=1}^n w_i \\ \alpha = \mu_k - (1-\gamma) \sum_{i=1}^n D_{ki} w_i \end{cases}, \quad (2.3)$$

де  $\alpha$  пропорційна множнику

Лагранжа і повинна розглядатися як  $n+1$  невідома змінна. Залежність від часу відсутня, і  $w_i$  визначаються з розв'язків системи лінійних рівнянь. Тепер можна спростити вираз для середньої корисності:

$$U_t = \prod_0^t c^\gamma(\tau) e^{z\tau} G(t) \quad G(t) = e^{-\gamma \int_0^t c(\tau) d\tau}$$

де величина:

$$z = \gamma \sum_{i=1}^n \mu_i w_i - \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i D_{ij} w_j$$

залежить від статистичних параметрів акцій, функції корисності і знайдених з (2.3) постійних вагових коефіцієнтів  $w_i$ .

Після підстановки оптимальних значень вагів  $w_i$  функціонал для оптимізації набуває вигляду:

$$\int_0^T e^{(z-\rho)\tau} c^\gamma(\tau) G(\tau) d\tau + \theta e^{(z-\rho)T} c^\gamma(T) G(T) = \max \quad (2.4)$$

Проваріюємо його за функцією питомого споживання  $c(t)$ :

$$c^{\gamma-1}(t) e^{(z-\rho)t} G(t) - \int_0^T e^{(z-\rho)\tau} c^\gamma(\tau) G(\tau) d\tau - \theta e^{(z-\rho)T} c^\gamma(T) G(T) = 0$$

Це інтегральне рівняння відносно  $c(t)$ . Поклавши  $t = T$ , одержуємо граничну умову  $c(T) = 1/\theta$ . Якщо взяти похідну по часу, інтегральне рівняння перейде в звичайне рівняння логістичного типу, з розв'язком (при  $\alpha \neq 0$  і  $c(T) = 1/\theta$ ):

$$\dot{c} = -vc + c^2 \Rightarrow c(t) = \frac{v}{1 + (\theta v - 1) \cdot e^{v(t-T)}}, \quad (2.5)$$

$$\text{де } v = (\rho - z) / (1 - \gamma).$$

Важливим наслідком (2.3) і (2.5) є те, що вибір портфеля не залежить від рішення по стратегії вилучень.

Розглянемо окремий випадок, коли інвестору доступні тільки два активи - депозит з фіксованою прибутковістю  $r_f$  і акція з волатильністю  $\sigma$  і прибутковістю  $r$ . Частка коштів розміщуються в депозиті, дорівнює  $w_1 = 1 - w$ , а в акціях  $w_2 = w$ .

Матриці дисперсій  $D_{ij}$ , дохідності  $\mu_i$  і ваги  $w_i$  мають вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} r_f \\ r \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 - w \\ w \end{pmatrix}$$

Вирішуючи систему (2.3), отримуємо:

$$w = \frac{r - r_f}{(1 - \gamma)\sigma^2} \quad z = \gamma r_f + \frac{\gamma}{2} \frac{(r - r_f)^2}{(1 - \gamma)\sigma^2}$$

## РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДЛЯ ІТО-ДИFUЗНОГО НЕПОВНОГО РИНКУ

### 3.1 Неповний ринок

Неповний фінансовий ринок - це ринок, на якому не виконуються умови теорії повного ринку, а саме: ідеальної конкуренції, повної інформації для всіх учасників та відсутності трансакційних витрат. Це ринок, де учасники можуть діяти на основі обмеженої або неповної інформації, де можуть існувати перешкоди для входу на ринок або обмеження в доступі до деяких активів, а також де витрати на здійснення угод можуть бути значними. Неповнота ринку може призвести до виникнення нерівноважних ситуацій, де ціни на активи можуть не відображати їхньої реальної вартості або можуть залежати від певних обмежень, що впливають на учасників ринку. Такі умови можуть виникнути через недосконалість інформації, недостатню конкуренцію, обмеження у торгівлі, а також через поведінкові особливості учасників ринку.

Причини неповноти ринку:

- Недосконалість інформації: інформація, доступна на ринку, може бути неповною або недостатньою для раціональних рішень. Наприклад, недостатність даних про фінансові показники компаній може призвести до неповної оцінки їхньої вартості.
- Недосконалість ринкових умов: ринкові умови можуть бути такими, що не створюють ідеального середовища для конкурентного визначення цін. Наприклад, існування монополії або олігополії може призвести до перекручення цін на ринку.
- Імперфекція умов торгівлі: Недосконалість умов торгівлі може призвести до неповних ринків. Наприклад, обмеження на торгівлю певними активами чи обмеження на доступ до ринку для певних учасників

**Невдача стандартних моделей повних ринків.** Стандартні моделі повних ринків базуються на таких припущеннях, як раціональність учасників ринку,



ідеальна інформація та відсутність трансакційних витрат. Однак реальний світ фінансових ринків часто не відповідає цим припущенням. Наприклад, учасники ринку можуть діяти не раціонально, інформація може бути неповною, а витрати на трансакції можуть впливати на ціни активів.

**Моделювання неповних ринків.** Моделі неповних ринків спрямовані на врахування недосконалостей у фінансових ринкових умовах. Вони включають у себе різні методи, такі як моделі з трансакційними витратами, моделі з обмеженим доступом до інформації, моделі з нерациональними учасниками ринку та інші.

### 3.2 Задача N-гравців

Задача гравців у неповному Іто-дифузному ринку може бути розглянута через призму теорії ігор. У цьому контексті гравці вибирають оптимальні стратегії, конкуруючи між собою на ринку, де умови та правила можуть бути неповними або нечіткими.

Гравці можуть представляти різні фінансові агенти, такі як інвестори, фонди, банки чи інші учасники ринку, які приймають рішення щодо своїх інвестицій або управління портфелем. Кожен гравець намагається максимізувати свій власний дохід або виграш, враховуючи непередбачуваність ринкових умов та дій інших учасників.

Теорія ігор дозволяє аналізувати взаємодію між гравцями, їх стратегії прийняття рішень та можливі наслідки цих рішень на загальний результат. В контексті неповного Іто-дифузного ринку, де інформація щодо цін та умов не завжди доступна або нечітка, гравці приймають рішення на підставі обмеженої інформації, ризикуючи втратами або отриманням прибутку.

Такий підхід дозволяє розглядати ринкові умови як гру з різними учасниками, які взаємодіють і конкурують, враховуючи невизначеність та ризику, пов'язані з фінансовими ринками.

Розглянемо ймовірнісний простір  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , що підтримує два процеси Броунівського руху  $(W_t, W_t^Y)_{t \in [0, T]}$ ,  $T < \infty$ , які мають неповну кореляцію з коефіцієнтом

$\rho \in (-1, 1)$ . Позначимо  $(F_t)_{t \in [0, T]}$  природну фільтрацію, породжену як  $W$ , так і  $W^Y$ , а  $(G_t)_{t \in [0, T]}$  - лише фільтрацію, породжену  $W^Y$ . Тоді  $((\mu_t)_{t \in [0, T]})$  і  $((\sigma_t)_{t \in [0, T]})$  - це процеси, адаптовані до  $(G_t)$ , з  $(0 < c \leq \sigma_t \leq C)$  і  $(|\mu_t| \leq C, t \in [0, T])$ , для деяких (можливо, визначених детермінованих) констант  $(c)$  і  $(C)$ .

Фінансовий ринок складається з безрискового облігаційного зобов'язання (яке вважається нумером та має нульову процентну ставку) та акцій, ціновий процес яких  $((S_t)_{t \in [0, T]})$  задовольняє

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \quad S_0 = s_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

На цьому ринку  $N$  гравців, позначених  $i \in I, I = \{1, 2, \dots, N\}$ , мають спільний інвестиційний горизонт  $[0, T]$  та здійснюють угоди між двома рахунками. Кожен гравець, скажімо гравець  $i$ , використовує самофінансуючу стратегію  $(\pi_t^i)_{t \in [0, T]}$ , що представляє (знижене до нумеру) кількість, інвестовану в акції. Багатство  $(X_t^i)_{t \in [0, T]}$  задовольняє

$$dX_t^i = \pi_t^i (\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \quad X_0^i = x_i \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

де  $\pi^i$  - допустима політика, яка належить

$$A = \left\{ E_P \left[ \int_0^T \sigma_s^2 \pi_s^2 ds \right] < \infty \right\} \quad (3.3)$$

Як у [17] (див. також [6, 9, 14, 15, 16, 25]), гравці максимізують очікувану кінцеву користь, але також цікавляться результатами своїх колег. Для довільної, але фіксованої політики  $(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_N)$ , гравець  $i, i \in I$ , прагне максимізувати

$$V^i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = \sup_{\pi^i \in A} E_P \left[ -\exp \left( -\frac{1}{\delta_i} (X_T^i - c_i C_T) \right) \mid X_0^1 = x_1, \dots, X_0^i = x_i, \dots, X_0^N = x_N \right] \quad (3.4)$$

$$C_T := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_T^j \quad (3.5)$$

Параметр  $\delta_i > 0$  є індивідуальною (абсолютною) межею ризику, тоді як константа  $c_i \in (-\infty, 1]$  моделює вагу індивідуальної взаємодії щодо середнього багатства всіх гравців. Якщо  $c_i > 0$ , вищезазначений критерій моделює конкуренцію, тоді як при



$c_i < 0$  він моделює гомофільні взаємодії (див., наприклад, [19]). Критерій оптимізації можна розглядати як стохастичну гру серед  $N$  гравців, де поняття оптимальності розглядається у контексті рівноваги Неша, викладеної нижче (див., наприклад, [7]).

**Означення 3.1.** Стратегія  $(\pi_t^*)_{t \in [0, T]} = (\pi_t^{1,*}, \dots, \pi_t^{N,*})_{t \in [0, T]} \in A^{\otimes N}$  називається рівновагою Неша, якщо для кожного  $i \in I$  та  $\pi^i \in A$ ,

$$\begin{aligned} & E_P \left[ -\exp \left( -\frac{1}{\delta_i} (X_T^{i,*} - c_i C_T^{i,*}) \right) \mid X_0^1 = x_1, \dots, X_0^i = x_i, \dots, X_0^N = x_N \right] \\ & \geq E_P \left[ -\exp \left( -\frac{1}{\delta_i} (X_T^i - c_i C_T^{i,*}) \right) \mid X_0^1 = x_1, \dots, X_0^i = x_i, \dots, X_0^N = x_N \right] \end{aligned}$$

У цьому неповному ринку нагадуємо про відповідну мінімальну мартингальну міру  $\mathbb{P}^{MM}$ , визначену на  $F_T$ , з

$$\frac{d\mathbb{P}^{MM}}{dP} = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds - \int_0^T \lambda_s dW_s \right), \quad (3.6)$$

де  $\lambda_t := \frac{\mu_t}{\sigma_t}$ ,  $t \in [0, T]$ , є процесом співвідношення Шарпа (див., серед іншого, [10]). За

припущеннями про коефіцієнти моделі, маємо, що для  $t \in [0, T]$ ,  $\lambda_t \in G$  і

$$|\lambda_t| \leq K \quad (3.7)$$

для деякої (можливо, детермінованої) константи  $K$ .

Далі, ми вводимо  $\mathbb{P}^{MM}$ -мартингал  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ ,

$$M_t := E_{\mathbb{P}^{MM}} \left[ e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_0^T \lambda_s^2 ds} \mid G_t \right] \quad (3.8)$$

**Твердження 3.1.** Розглянемо задачу оптимізації:

$$v(x) = \sup_{a \in A} E_P \left[ -e^{-\frac{1}{\delta} x_T} \mid x_0 = x \right] \quad (3.9)$$

з  $\delta > 0$  і  $(x_t)_{t \in [0, T]}$ , що вирішує



$$dx_t = a_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \quad x_0 = x \in \square, \quad a \in A \quad (3.10)$$

Тоді оптимальна стратегія  $(a_t^*)_{t \in [0, T]}$  і функція значення задаються

$$a_t^* = \delta \left( \frac{\lambda_t}{\sigma_t} + \frac{\rho}{1-\rho^2} \frac{\xi_t}{\sigma_t} \right) \quad (3.11)$$

$$v(x) = -e^{-\frac{1}{\delta}x} M_0^{\frac{1}{1-\rho^2}} = -e^{-\frac{1}{\delta}x} \left( E_{\square MM} \left[ e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_0^T \lambda_s^2 ds} \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}} \quad (3.12)$$

*Доведення.* Покажемо, що процес  $(u_t)_{t \in [0, T]}$ ,

$$u_t := -e^{-\frac{1}{\delta}x_t} \left( E_{\square MM} \left[ e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_t^T \lambda_s^2 ds} \mid \mathcal{G}_t \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}} \quad (3.13)$$

з  $u_0 = v(x), x \in \square$ , є мартингалом для  $x_t$ , який вирішує (3.10) для довільного  $a \in A$  і стає мартингалом для  $a^*$  як у (3.7). Для цього ми запишемо

$$u_t = -e^{-\frac{x_t}{\delta}} M_t^{\frac{1}{1-\rho^2}} e^{N_t} \quad \text{і} \quad N_t = \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_u^2 du$$

Окрім цього,

$$\begin{aligned} du_t &= -\frac{u_t}{\delta} dx_t + \frac{1}{2\delta^2} u_t d\langle x \rangle_t + u_t dN_t + \frac{1}{1-\rho^2} \frac{u_t}{M_t} dM_t + \frac{1}{2(1-\rho^2)} \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \frac{u_t}{M_t^2} d\langle M \rangle_t - \frac{1}{\delta(1-\rho^2)} \frac{u_t}{M_t} d\langle x, M \rangle_t \\ &= u_t \left( -\frac{1}{\delta} a_t \mu_t + \frac{1}{2} \frac{1}{\delta^2} a_t^2 \sigma_t^2 + \frac{1}{2} \lambda_t^2 + \frac{\rho}{1-\rho^2} \xi_t \lambda_t + \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)^2} \xi_t^2 - \frac{\rho}{\delta(1-\rho^2)} a_t \sigma_t \xi_t \right) dt \\ &\quad + u_t \left( -\frac{1}{\delta} a_t \sigma_t dW_t + \frac{1}{1-\rho^2} \xi_t dW_t^Y \right) \\ &= \frac{1}{2} u_t \left( -\frac{1}{\delta} \sigma_t a_t + \lambda_t + \frac{\rho}{1-\rho^2} \xi_t \right)^2 dt + u_t \left( -\frac{1}{\delta} a_t \sigma_t dW_t + \frac{1}{1-\rho^2} \xi_t dW_t^Y \right). \end{aligned}$$

Оскільки  $u_t < 0$ , зсув лишається невід'ємним і зникає для  $t \in [0, T]$  тоді і тільки тоді, коли стратегія

$$a_i^* = \delta \left( \frac{\lambda_i}{\sigma_i} + \frac{\rho}{1-\rho^2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} \right)$$

використовується. Крім того,  $a^* \in A$ , оскільки це випливає з припущення про обмеженість  $\sigma$ , нерівності (3.11) і того, що  $\xi \in L^2(P)$ .



## ВИСНОВКИ

В ході проведеної роботи були досягнуті наступні результати:

- В процесі дослідження було ретельно вивчено походження та сутність рівняння Іто, розкрито його математичні основи та теоретичні принципи.
- Проведено детальний аналіз застосування рівняння Іто в моделюванні фінансових ринків, виявлено його ключову роль у прогнозуванні поведінки ринку та управлінні ризиками.
- Отриманий основний результат, у вигляді твердження 3.1, вказує на значущість застосування теорії ігор для стохастичних моделей динаміки фінансових ринків, що дає можливість кращого розуміння їхньої природи та взаємозв'язків між учасниками, а, отже, і способи вибору оптимальних стратегій.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М. : Мир, 1986. — 528 с.
2. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М. : Мир, 2003. — 408 с
3. Мандельброт Б. Хадсон Р. Л. (He) послушные рынки. Фрактальная революция в финансах 2004.
4. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики 2-тома 1998.
5. Степанов. С.С. Стохастический мир 2009.
6. René Carmona. Lectures on BSDEs, stochastic control, and stochastic differential games with financial applications. SIAM, 2016.
7. George Chacko and Luis M Viceira. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets. Review of Financial Studies, 18(4):1369-1402, 2005.
8. Gilles-Edouard Espinosa and Nizar Touzi. Optimal investment under relative performance concerns. Mathematical Finance, 25(2):221-257, 2015.
9. Hans Föllmer and Martin Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. Applied stochastic analysis, 5(389-414):19-31, 1991.
10. Guanxing Fu, Xizhi Su, and Chao Zhou. Mean field exponential utility game: A probabilistic approach. arXiv preprint arXiv:2006.07684, 2020.
11. Xin Guo, Renyuan Xu, and Thaleia Zariphopoulou. Entropy regularization for mean field games with learning. arXiv preprint arXiv:2010.00145, 2020.
12. Minyi Huang, Roland P Malhamé, and Peter E Caines. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle.
13. Holger Kraft, André Meyer-Wehmann, and Frank Thomas Seifried. Dy-namic asset allocation with relative wealth concerns in incomplete markets. Journal of Economic Dynamics and Control, 113:103857, 2020 .

14. Daniel Lacker and Agathe Soret. Many-player games of optimal consumption and investment under relative performance criteria. *Mathematics and Financial Economics*, 14(2):263-281, 2020.
15. Daniel Lacker and Thaleia Zariphopoulou. Mean field and n-agent games for optimal investment under relative performance criteria. *Mathematical Finance*, 29(4):1003-1038, 2019.
16. Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1) : 229 260, 2007.
17. Yan Leng, Xiaowen Dong, Junfeng Wu, and Alex Pentland. Learning quadratic games on networks. In *International Conference on Machine Learning*, pages 5820-5830. PMLR, 2020.
18. Marek Musiela and Thaleia Zariphopoulou. A note on the term structure of risk aversion in utilitybased pricing systems. Technical report, 2002.
19. Nathanael David Ringer. Three essays on valuation and investment in incomplete markets. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2011.
20. Richard Rouge and Nicole El Karoui. Pricing via utility maximization and entropy. *Mathematical Finance*, 10(2):259-276, 2000.
21. Ronnie Sircar and Thaleia Zariphopoulou. Bounds and asymptotic approximations for utility prices when volatility is random. *SIAM journal on control and optimization*, 43(4):1328-1353, 2005.
22. Haoran Wang, Thaleia Zariphopoulou, and Xun Yu Zhou. Reinforce-ment learning in continuous time and space: A stochastic control approach. *Journal of Machine Learning Research*, 21(198):1-34, 2020.
23. Cvitanic, J. and Karatzas, I. (1992). Convex duality in constrained portfolio optimization. *Ann. Appl. Probab.* 2 767–818.
24. Cvitanic, J., Schachermayer, W. and Wang, H. (2001). Utility maximization in incomplete markets with random endowment. *Finance Stoch.* 5 259–272.
25. Delbaen, F., Grandits, P., Rheinl'ander, T., Samperi, D., Schweizer, M. and Stricker, C. (2002). Exponential hedging and entropic penalties. *Math. Finance* 12 99–123.



26. El Karoui, N., Peng, S. and Quenez, M. C. (1997). Backward stochastic differential equations in finance. *Math. Finance* 7 1–71.
27. El Karoui, N. and Rouge, R. (2000). Pricing via utility maximization and entropy. *Math. Finance* 10 259–276
28. Follmer, H. and Schied, A. (2002). *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*. de Gruyter, Berlin.
29. Karatzas, I., Lehoczky, J. P. and Shreve, S. E. (1987). Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon. *SIAM J. Control Optim.* 25 1557–1586.
30. Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *J. Econom. Theory* 3 373–413.
31. Pardoux, E. and Peng, S. G. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems Control Lett.* 14 55–61.
32. Sekine, J. (2002). Exponential hedging by solving a backward stochastic differential equation: An alternative approach. Preprint, Osaka Univ.
33. Peters, E. E. (1991). *Chaos and order in the capital markets*. John Wiley and Sons. ISBN 978-0-471-53372-6.
34. Peters, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis*. John Wiley and Sons. ISBN 978-0-471-58524-4.
35. Joel Hasbrouck. (1991) *Empirical Market Microstructure: The Institutions, Economics, and Econometrics of Securities Trading*. 1st Edition. ISBN-13: 978-0195301649