

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ  
СТУСА

ГРОНСЬКА МАРІЯ ІГОРІВНА

Допускається до захисту:

В.о. Завідувача кафедри прикладної  
математики та кібербезпеки, доктор  
філософії з математики ст. викладач

\_\_\_\_\_ А. В. Луценко

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 р.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПРУЖНОСТІ З ВРАХУВАННЯ  
ВНУТРІШНЬОГО ДЕМПІНГУ, РІВНЯННЯ «LASER – PULSE»

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (магістерська) робота

(відповідно до стандарту спеціальності та ОП)

Науковий керівник:

К. О. Буряченко,

доцент кафедри

прикладної

математики, кандидат

фіз.-мат. наук, доцент

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Оцінка: \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

(бали/за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)

Голова ЕК: \_\_\_\_\_

(підпис)

Вінниця 2024

## АНОТАЦІЯ

Гронська М.І. Дослідження процесів пружності з врахуванням внутрішнього демпінгу, рівняння «Laser-pulse». Спеціальність 113 «Прикладна математика», Освітня програма «Прикладна математика». Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2024.

У кваліфікаційній роботі досліджена мішана задача для гіперболічного рівняння четвертого порядку, рівняння лазерного пульсу, проведений його чисельний та якісний аналіз, зокрема, отримана явна формула розв'язку та з її допомогою показано, що виконується аналог принципу максимуму для мішаної задачі в прямокутній допустимій області.

*Ключові слова:* гіперболічні рівняння четвертого порядку, мішана задача, аналітичний розв'язок, рівняння «Laser-pulse», принцип максимуму, термопружність.

44 с., 3 рис., 39 джерела.

Hronska. M. Investigation of elasticity processes with internal dumping, laser – pulse equation. Specialty 113 «Applied Math», Programme «Applied Math and cyber security»/ Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2024.

In the qualifying work, a mixed problem for a hyperbolic equation of the fourth order, the equation of a laser pulse, was investigated, its numerical and qualitative analysis was carried out, in particular, an explicit solution formula was obtained, and with its help it was shown that an analogue of the maximum principle for a mixed problem in a rectangular admissible region is fulfilled.

Keywords: fourth-order hyperbolic equations, mixed problem, analytical solution, "Laser-pulse" equation, maximum principle, thermoelasticity.

44 p., Fig. 3, 39 items.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	2
РОЗДІЛ 1. ДОПОМІЖНИЙ МАТЕРІАЛ .....	4
РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. АНАЛІЗ РІВНЯННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЛЬСУ .....	10
2.1. Постановка задачі.....	11
2.2 Чисельний аналіз рівняння лазерного пульсу.....	13
<i>Як працює калькулятор пікової потужності лазера?</i> .....	13
<i>Формули для пікової потужності і пікової щільності потужності.</i> .....	14
2.3 Якісний аналіз рівняння лазерного пульсу. ....	17
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЛЬСУ ....	21
3.1. Імпульсні лазери. ....	24
<i>Різні типи лазерів</i> .....	24
<i>Двоімпульсний, повторюваний і пакетний режими.</i> ....	26
<i>Характеристики лазерного світла</i> .....	27
<i>Довжина хвилі</i> .....	28
<i>Збільшена пропускна здатність</i> .....	28
3.2. Розрахунок енергії пульсу .....	30
<i>Фізика та лазерний імпульс</i> .....	31
3.3. Історія технології лазерного різання.....	33
<i>Як мікрохвильова технологія привела до лазерів</i> .....	33
<i>Як еволюціонували лазери з 1960-х років</i> .....	34
<i>Сучасні лазери</i> .....	35
<i>Послуги лазерного різання на виробництві</i> .....	35
<i>Історія лазера</i> .....	36
<i>Винахід голографії</i> .....	36
<i>Введено термін лазер</i> .....	37
<i>Майбутнє лазерних технологій</i> .....	37
ВИСНОВКИ .....	40
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	41

## ВСТУП

*Актуальність теми дослідження.* Дослідження рівнянь термопружності, а також початкових та початково-крайових (мішаних) задач для цього рівняння є доволі актуальною темою у дослідників, завдяки чисельним його застосуванням, водночас, до цього часу, існує багато саме чисельних методів для їх дослідження, зокрема, роботами R.D. Mindlin, W. Nowacki. Це пов'язано з тим, що отримати явний аналітичний розв'язок в деяких випадках є доволі складним процесом. Водночас, явний вигляд розв'язку дозволяє доводити багато властивостей, чого не можна зробити у випадку чисельного аналізу. Таким з них, є наприклад, принцип максимуму для гіперболічних рівнянь, що є дієвим інструментом для дослідження якісних властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних.

*Об'єкт дослідження:* гіперболічні рівняння четвертого порядку на площині, рівняння лазерного пульсу, мішана задача.

*Предмет дослідження:* Принцип максимуму, якісні властивості, аналітичний розв'язок.

*Мета:* Дослідження аналітичного підходу до розв'язків мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу.

Для реалізації поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

1. Розв'язуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з ненульовою правою частиною.
2. Отримуємо явний аналітичний розв'язок мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу. Використовуючи оператор розв'язати рівняння гіперболічного типу.
3. Проводимо якісний аналіз рівняння лазерного пульсу, зокрема, встановлюємо оцінки аналогу принципу максимуму для розв'язків мішаної задачі.

*Методи дослідження:* розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами високого (четвертого) порядку, метод Ейлера, метод невизначених коефіцієнтів, мажорантна ознака збіжності функціональних

рядів, формули інтегрування по частинам.

*Наукова новизна:* Проведено якісний аналіз рівняння «laser-pulse», отримано більш повніший, ніж було раніше, аналітичний розв'язок мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу.

*Практичне значення:* Рівняння лазерного пульсу є важливим подальшого вивчення математичної фізики в області термопружності. Дослідження рівнянь термопружності чисельними методами вже було здійснено такими авторами, як: R.D. Mindlin, W. Nowacki, але їх робота має один суттєвий недолік – оскільки класичні формулювання призводять до параболічного рівняння теплопровідності, припускаючи нескінченну швидкість тепла. Зрозуміло, що таке припущення йде в розрив з законами фізики тому для вирішення цього неможливого результату були проведені дослідження, щоб в той чи інший спосіб позбутися цього недоліку. Наступними дослідниками стали R. V. Hetnarski та J. Ignaczak, що вивчали узагальнені теорії на жорстке термопружне тіло в напівпросторі під впливом плоского джерела тепла і короткого лазерного пульсу. Саме це рівняння лазерного пульсу досліджено в цій роботі аналітичним методом.

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, 3 основних розділів, висновків та списку використаних джерел.

В першому розділі представлені допоміжні матеріали, що були вивчені у курсі математичного аналізу, а також рівнянь математичної фізики. Їх використання лежить в основі результату роботи.

У другому розділі було поставлено задачу, аналіз рівняння лазерного пульсу.

Третій розділ описує застосування даного рівняння.

Найважливішим є інноваційний, аналітичний підхід до рівняння, що дотепер розглядалось чисельними методами.

## РОЗДІЛ 1

### ДОПОМІЖНИЙ МАТЕРІАЛ

У цьому розділі представлено допоміжний матеріал із попередніх курсів, зокрема, з курсів математичного аналізу, рівнянь в частинних похідних, що буде використовуватись у процесі досліджень.

В основі дослідження лежить рівняння четвертого порядку, рівняння лазерного пульсу, яке відноситься до рівнянь гіперболічного типу четвертого порядку,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - t_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \left( 1 + t^0 \frac{\partial}{\partial t} \right) u = \\ & = \frac{\partial u^4}{\partial x^4} + t^0 \frac{\partial u^4}{\partial t^4} - (1 + t^0 + \varepsilon t^0) \frac{\partial u^4}{\partial t^2 \partial x^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial u^3}{\partial t^3} \\ & = f(x, t). \end{aligned}$$

Це рівняння є частинним випадком загального рівняння четвертого порядку на площині, в області  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} L(u) = & \sum_{k=0}^4 a_k \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^{4-k} \partial x_2^k} + \sum_{k=0}^3 b_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^{3-k} \partial x_2^k} + \sum_{k=0}^2 c_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{2-k} \partial x_2^k} + d_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ & + d_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + eu, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

За головною частиною рівняння (1.1)

$$\sum_{k=0}^4 a_k \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^{4-k} \partial x_2^k} \quad (1.2)$$

складемо характеристичний поліном:

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 \quad (1.3)$$

*Означення 1.* [1, 2] Будемо казати, що диференціальне рівняння (1.1) зі сталими коефіцієнтами в головній частині є рівнянням гіперболічного типу, якщо всі корені характеристичного рівняння  $Q(\lambda) = 0$  є простими, дійсними і не дорівнюють  $\pm i$ , це означає, що рівняння є не виродженим або рівнянням головного типу.

Як відомо, принцип максимуму дає можливість оцінити якісні властивості розв'язків рівнянь математичної фізики. З класичної теорії рівнянь математичної фізики відомо, що принцип максимум встановлений для рівнянь еліптичного та параболічного типів.

**Теорема 1.1** [39]

Нехай  $u(x)$  – гармонічна функція (тобто двічі неперервно диференційована і є розв'язком рівняння Лапласа) в обмеженій області  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $u(x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u(x) \neq \text{const}$ . Тоді  $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$ ,  $\min_{\bar{\Omega}} |u| = \min_{\partial\Omega} |u|$ .

Розглянемо аналогічну теорему для рівнянь параболічного типу.

**Теорема 1.2** [39]

Нехай  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$  – розв'язок однорідного рівняння теплопровідності  $u_t = a^2 u_{xx}$ , в області  $\Omega_T = \{(x, t) : x \in (0, \ell), t \in (0, T)\}$ . Покладемо  $\Gamma = \{x \in [0, \ell], t = 0\} \cup \{x = 0, t \in [0, T]\} \cup \{x = \ell, t \in [0, T]\}$ .

Тоді  $\max_{(x,t) \in \Omega_T} u = \max_{(x,t) \in \Gamma} u$ .

Що стосується принципу максимуму для гіперболічних рівнянь високого порядку, то для рівнянь четвертого порядку без молодших членів він був доведений для слабких розв'язків задачі Коші в статті Andrieva Yu., Buryachenko K.O [6]. Як було зазначено вище, принцип максимуму навіть для простого випадку одновимірного хвильового рівняння [34], і для телеграфного рівняння другого порядку [15], [21], [29] суттєво відрізняються від таких, для еліптичних і параболічних випадків. Так, наприклад, в монографії Protter M.H., Weinberger H.F., [34] показано, що для класичних розв'язків гіперболічних рівнянь і нерівностей принцип максимуму не виконується. Навіть у найпростішому випадку хвильового рівняння з двома незалежними змінними  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  максимум непостійного розв'язку  $u = \sin x \sin t$  в прямокутнику  $\{(x, t) : x \in [0, \pi], t \in [0, \pi]\}$  відбувається у внутрішній точці  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . У розділі 4 роботи [3] принцип максимуму для лінійних гіперболічних рівнянь загального типу зі змінними коефіцієнтами також отримано для задач Коші та

крайових задач на характеристики (проблема Гурса). Слідом за Ortega R., Robles-Perez A.M. [29] введемо визначення «слабкої форми» принципу максимуму, який використовується для гіперболічних рівнянь, які будуть використані пізніше.

*Означення 2.* [29] Нехай  $L = Lu$  буде лінійним диференціальним оператором (оператор-математичне відображення між множинами, в якому кожна з них наділена якоюсь додатковою структурою: порядком, топологією, алгебраїчними операціями), що діє на функції  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ , в  $\mathcal{D}$ . Ці функції належатимуть до певного сімейства  $B$ , яке включає граничні умови або інші вимоги. Кажуть, що  $L$  задовольняє принцип максимуму, якщо з умов  $Lu \geq 0, u \in B$ , випливатиме,  $u \geq 0$  в  $\mathcal{D}$ .

У подальших роботах цих авторів (див. [25], [24], [23]) досліджувався принцип максимуму, для слабо обмежених, двічі періодичні рішення з простору  $L^\infty$  телеграфного рівняння (пара лінійних диференціальних рівнянь, що описують розподіл напруги і струму за часом і відстанню в лініях електричного зв'язку), з параметром  $\lambda$  у нижньому терміні одно-, дво- та тривимірних просторів, що включають випадки змінних коефіцієнтів. Також був введений метод верхньої і нижньої оцінок, пов'язаних з нелінійним рівнянням, що дозволяє отримати аналогічні результати (теореми єдиності, існування та регулярності) для телеграфних рівнянь із зовнішнім нелінійним впливом із застосуванням принципу максимуму. Розглядався також випадок з зовнішнім впливом (ненульовою правою частиною). Принцип максимуму для загальних квазілінійних гіперболічних систем з дисипацією було доведено Конгом Де Сіном [7]. Дано дві оцінки розв'язку загальної квазілінійної гіперболічної системи та введено поняття дисипація (сильна дисипація та слабка дисипація), потім сформульовані деякі максимальні принципи квазілінійних гіперболічних систем з розсіюванням. За допомогою принципу максимуму доведено теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для розглянутої квазілінійної гіперболічної системи.



Таким чином, проблема доведення принципу максимуму для слабких розв'язків ще ускладнюється і в цей час стає більш цікавим у випадку гіперболічних рівнянь четвертого порядку, особливо у випадку неklasичного граничного значення проблеми з даними слабкої регулярності. Більш того, у випадку слабких розв'язків ми не можемо використовувати термін звичайних слідів у випадках початкових даних слабкої регулярності, і доводиться застосовувати поняття  $L$  – слідів, слідів, які пов'язаний з диференціальним оператором.

В обмеженій області  $\Omega$  ми розглядаємо лінійну диференціальну операцію  $\mathcal{L}$  порядку  $m, m \geq 2$ , та формально спряжену до неї  $\mathcal{L}^+$ :

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \mathcal{L}^+(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha(a_\alpha), \quad (1.4)$$

де  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  мульти-індекс. Для рівняння (1.1)  $n = 2, m = 4$ .

*Означення 3.* Мінімальний оператор [4]. Розглянемо диференціальну операцію (1.4) над функціями з простору  $C_0^\infty(\Omega)$ . Мінімальним оператором  $L_0$  називається розширенням операції з  $C_0^\infty(\Omega)$  на множину  $D(L_0) := C_0^\infty(\Omega)$ . Замикання реалізується в нормі графа оператора  $L: \|u\|_L^2 := \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2$ .

*Означення 4.* Максимальний оператор [2]. Максимальний оператор  $L$  визначається як обмеження диференціальної операції  $\mathcal{L}(D_x)$  на множину  $D(L) := \{u \in L^2(\Omega) : Lu \in L^2(\Omega)\}$ .

*Означення 5.* [4]. Оператор  $\tilde{L}$  визначається як розширення мінімального оператора  $L_0$  до множини  $D(\tilde{L}) := \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}$ .

*Означення 6.* Регулярний оператор [2]. Оператор називається регулярним, якщо  $D(L) = D(\tilde{L})$ .

Наприклад, для еліптичного випадку  $D(\tilde{L}) = H^4(\Omega), D(L_0) = H^4(\Omega)$ , простір Соболева [8].

Аналогічно можна ввести оператори  $L^+$ ,  $\tilde{L}^+$ , і  $L_0^+$ , пов'язані з формально суміжною операцією  $\mathcal{L}^+$ .

Визначення слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння (1.1) із простору  $D(L)$  тісно пов'язане з поняттям  $L$ -сліди, тобто сліди, які пов'язані з диференціальним оператором  $L$ .

*Означення 7.*  $L$ -сліди. [8]. Припустимо, що для функції  $u \in D(\tilde{L})$  існують лінійні неперервні функціонали  $L_{(p)}u$  на просторі  $H^{m-p-1/2}(\partial\Omega)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , таке, що виконується наступна рівність:

$$(Lu, v)_{L^2(\Omega)} - (u, L^+v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=0}^{m-1} (L_{(m-1-j)}u, \partial_v^{(j)}v) \quad (1.5)$$

для будь-яких функцій  $v \in H^m(\Omega)$ . Функціонали  $L_{(p)}u$  називається  $L_{(p)}$ -сліди функції  $u \in D(\tilde{L})$ . Тут  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  є скалярний добуток у гільбертовому просторі  $L^2(\Omega)$ .

Для  $L^2$ -розв'язків поняття  $L_{(p)}$ -сліди можна реалізувати таким чином.

*Означення 8.* [8]. Розподіли  $L_{(p)}u \in H^{-p-1}(\partial\Omega)$ ,  $p = 0, \dots, m-1$ , називаються  $L$ -сліди функції  $u \in D(L)$  на  $\partial\Omega$ , якщо має місце наступна тотожність:

$$\int_{\Omega} (Lu \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{L^+v}) dx = \sum_{j=0}^{m-1} \langle L_{(m-1-j)}u, \partial_v^{(j)}v \rangle_{\partial\Omega} \quad (1.6)$$

для будь-яких функцій  $v \in H^m(\Omega)$ .

Наприклад, співвідношення для  $L$ -сліди розв'язку  $u \in D(L)$  для рівняння четвертого порядку  $Lu = f \in L^2(\Omega)$  має вигляд:

$$\sum_{j=0}^3 \langle L_{(3-j)}u, \partial_v^{(j)}v \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} f \cdot \bar{v} dx, \quad (1.7)$$

для усіх  $v \in \text{Ker}L^+ \cap H^m(\Omega)$ .

Нарешті, переходимо до визначення слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння (1.1):

*Означення 9.* [1] Назвемо функцію  $u \in D(L)$  слабким розв'язком задачі Коші для рівняння (1.1), якщо вона задовольняє таку інтегральну тотожність

$$(f, v)_{L^2(\Omega)} - (u, L^+ v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=0}^3 \langle L_{(3-j)} u, \partial_v^{(j)} v \rangle_{\partial\Omega} \quad (1.8)$$

для будь-яких функцій  $v \in H^m(\Omega)$ . Функціонали  $L_{(p)}u$  називається  $L_{(p)}$  – сліди функції  $u, p = 0, 1, 2, 3$  і повністю визначається початковими функціями  $\varphi, \psi, \sigma, \chi$  таким чином:

$$L_{(0)}u = -L(x)u|_{\partial\Omega} = -L(v)\varphi;$$

$$L_{(1)}u = L(v)\psi + \alpha_1\varphi'_{\mathcal{T}} + \alpha_2\varphi;$$

$$L_{(2)}u = -L(v)\sigma + \beta_1\psi'_{\mathcal{T}} + \beta_2\psi + \beta_3\varphi\varphi''_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \beta_4\varphi'_{\mathcal{T}} + \beta_5\varphi;$$

$$L_{(3)}u = -L(v)\chi + \delta_1\varphi'''_{\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}} + \delta_2\sigma + \delta_3\psi''_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \delta_4\psi'_{\mathcal{T}} + \delta_4\psi + \delta_5\psi + \delta_6\varphi''_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \delta_7\varphi'_{\mathcal{T}} + \delta_8\varphi.$$

Тут  $\alpha_i, i = 1, 2, \beta_j, j = 1, 2, \dots, 5, \delta_k, k = 1, \dots, 9$  є гладкими функціями, повністю визначеними коефіцієнтами рівняння (1.1).

## РОЗДІЛ 2

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, АНАЛІЗ РІВНЯННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЛЬСУ

Рівняння лазерного пульсу є моделями термопружної реакції напівпросторового середовища на тепло, що генерується коротким лазерним імпульсом. Для виведення рівняння використовується узагальнена теорія термопружності, запропонована Green, A.E., Lindsay, K.A., [14]. Ця теорія узагальнює класичну теорію термопружності шляхом розробки рівнянь гіперболічної провідності та основних рівнянь, що залежать від температури. Таким чином виправляється властивий парадокс і фізично нереалістичний результат у класичній теорії термопружності, яка пропонує нескінченну швидкість теплових реакцій через середовище. Його справедливість обґрунтовується виконанням закону Фур'є, на якому базується класична термопружність. Теорія Green, A.E., Lindsay, K.A. [14], приймає два часи теплової релаксації та константу термопружного зв'язку як специфічні параметри матеріалу для врахування термопружних хвиль зі скінченною швидкістю.

У моделі, представленій у цьому дослідженні, використовується напівпросторове середовище, яке накладено на свою межу індуковане лазером тепло у формі продукту експоненціального зменшуваного - функції глибини напівпростору та спотворений часовий профіль Гауса.

Представлено числовий аналіз точного розв'язку закритої форми. Цей аналіз показує, що для фіксованого значення поперечний переріз глибини напівпростору, реакція напруга-температура представлена парою плавних перехідних функцій часу та відображає дві чіткі плоскі теплові хвилі фронти кінцевої швидкості.

## 2.1. Постановка задачі.

Розглянемо мішану задачу в площинній області  $Q = \{(x, t),$

$\partial e x > 0, t > 0\}$ .

Для гіперболічного рівняння четвертого порядку з постійними коефіцієнтами, яке є математичною моделлю відгуку напівпростору на короткий лазерний імпульс, рівняння лазерного пульсу:

$$\Gamma\varphi = f(x, t), \quad (x, t) \in$$

$Q,$

$$\begin{aligned} \left(1 + t^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\theta &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi, \text{ де} \\ \Gamma u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - t^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)u - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \left(1 + t^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)u \\ &= \frac{\partial u^4}{\partial x^4} + t^0 \frac{\partial u^4}{\partial t^4} - (1 + t^0 + \varepsilon t^0) \frac{\partial u^4}{\partial t^2 \partial x^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} \\ &\quad + \frac{\partial u^3}{\partial t^3}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

R. В. Hetnarski та J. Ignaczak [17] розглядали наступну мішану задачу для функцій  $\varphi(x, t), \theta(x, t)$  в області  $Q$ :

$$\varphi_t^{(k)}(x, 0) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad x > 0, \quad (2.2)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_t(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad (2.3)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi_{xx}(0, t) = \theta(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Було доведено існування, єдиність і неперервну залежність розв'язку, наведено ефективні методи чисельного розрахунку рішення і отримана строга оцінка для наближених розв'язків; досліджено поведінку розв'язку при  $t \rightarrow +\infty$ .

Метою даної роботи є застосування принципу максимуму для гладких та слабких розв'язків задачі Коші для гіперболічних рівнянь четвертого порядку (див., наприклад, [4]) для доведення якісних властивостей мішаної задачі. А саме, буде доведено: єдиність і неперервну залежність та досліджено поведінку розв'язків при  $t \rightarrow +\infty$ .

Неважко побачити, що оператор рівняння лазерного пульсу є гіперболічний. Дійсно, використовуючи методи математичної фізики визначення розв'язку рівнянь в частинних похідних, маємо:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - t_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \left( 1 + t^0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \\
 &= \begin{cases} \lambda_1 \sim \frac{\partial}{\partial t} \\ \lambda_2 \sim \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - t_0 \lambda_1^2 - \lambda_1) - \varepsilon \lambda_2^2 \lambda_1 (1 + t^0 \lambda_1) \\
 &= \lambda_2^4 - t_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^3 - \varepsilon \lambda_1 \lambda_2^2 - \varepsilon t_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \\
 &= t_0 \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_1^3 - (t^0 + \varepsilon t^0 + 1) \lambda_1^2 \lambda_2^2 - (\varepsilon + 1) \lambda_1 \lambda_2^2 \\
 &= \begin{cases} \lambda_1 \sim \frac{\partial}{\partial t} \\ \lambda_2 \sim \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} = t_0 \frac{\partial u^4}{\partial t^4} + \frac{\partial u^4}{\partial x^4} + \left( -(t^0 + \varepsilon t^0 + 1) \frac{\partial u^4}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + \frac{\partial u^3}{\partial t^3} \\
 &\quad + \left( -(\varepsilon + 1) \frac{\partial u^3}{\partial t \partial x^2} \right) \\
 &= \frac{\partial u^4}{\partial x^4} + t^0 \frac{\partial u^4}{\partial t^4} - (1 + t^0 + \varepsilon t^0) \frac{\partial u^4}{\partial t^2 \partial x^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial u^3}{\partial t^3} \\
 &= f(x, t), \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial u^4}{\partial x^4} + t^0 \frac{\partial u^4}{\partial t^4} - (1 + t^0 + \varepsilon t^0) \frac{\partial u^4}{\partial t^2 \partial x^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial u^3}{\partial t^3} \\
 &= f(x, t), \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

де  $t_0, t^0, \varepsilon$  є константами:  $t^0 \geq t_0 > 1, \varepsilon > 0, (1 + t_0 + \varepsilon t^0)^2 > 4t_0$ , і  $f(x, t)$  – данна функція.

## 2.2 Чисельний аналіз рівняння лазерного пульсу.

Зараз існує велика кількість програмних забезпечень які здатні підрахувати і площу лазерного пульсу і також потужність лазерного імпульсу, які є результатом чисельного аналізу рівняння лазерного пульсу. Рівняння лазерного пульсу, здебільшого вивчалася за допомогою методів чисельного аналізу, зокрема, наприклад, було розроблено чимало застосунків, які дозволяють врахувати площу цього лазера, імпульс, потужність і так далі, підставляючи такі початкові дані, як: діаметр, енергію імпульсу, ширину імпульсу, а також враховуючи простір в якому поширюється імпульс.

Одним із таких застосунків є, наприклад, сайт: [www.gentec-eo.com](http://www.gentec-eo.com). Це лише одна з багатьох програм, що використовує чисельні методи для розрахунку результату (див. рис. 1).

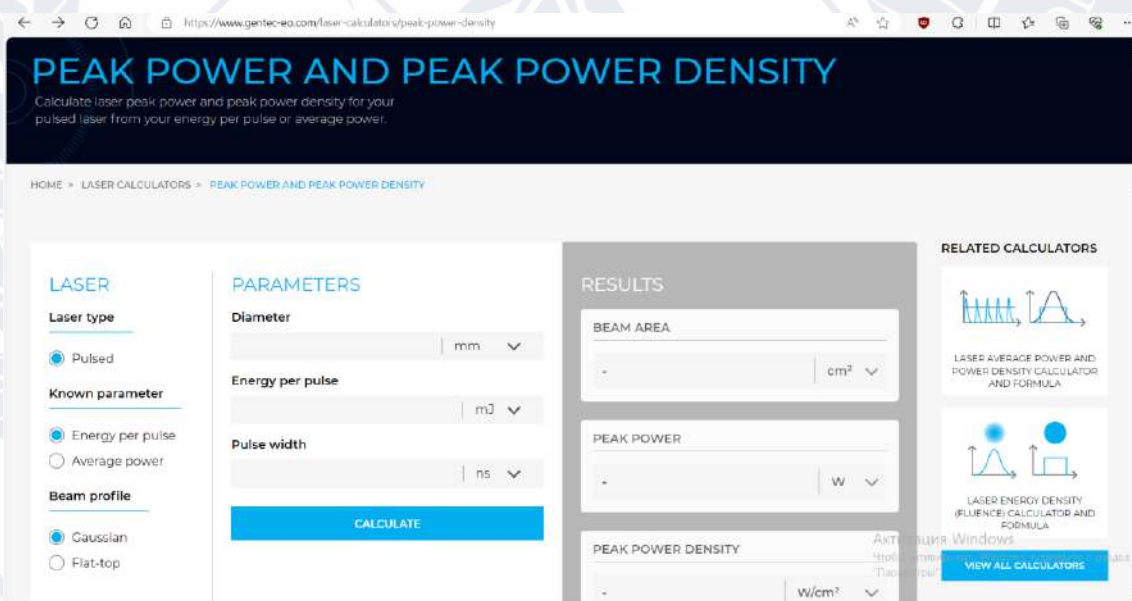


Рисунок 1

### **Як працює калькулятор пікової потужності лазера?**

Пікова потужність – це концепція, яка корисна лише тоді, коли ви думаєте про імпульсні лазери. У лазері безперервної дії спостерігаються невеликі коливання, але переважно можна сказати, що мінімальна, середня і максимальна потужність лазера безперервної дії однакові. В імпульсному режимі кожен невеликий сплеск енергії поділяється часом простою, коли світло не випромінюється.

Таким чином, мінімальна потужність зазвичай становить 0 Вт, а максимальна потужність досягає піку, коли інтенсивність досягає максимального значення. Щоб розрахувати пікову потужність лазерного променя, доводиться розділити енергію кожного імпульсу на тривалість імпульсу (також відому як ширина імпульсу). Тоді, щоб знайти пікову щільність потужності, вам потрібно лише розділити пікову потужність на площу поперечного перерізу променя на заданій відстані. Крім того, якщо хтось уже знає середню потужність свого лазера, ми можемо знайти енергію імпульсу, розділивши її на частоту повторення. Щільність потужності лазера також є величиною, яка впливає на реакцію матеріалу на неї. Звичайно, імпульсний лазер може пошкодити поверхню через накопичення повної енергії з часом, але це буде пов'язане з його середньою потужністю. Оскільки передача енергії не здійснюється безперервно, поверхня може бути пошкоджена під час кожного імпульсу. Це станеться, якщо енергія одного імпульсу виявиться надто високою, щоб матеріал міг поглинути та розсіяти її, зберігаючи при цьому свою фізичну цілісність. Таким чином, кожен імпульс відриватиме частину поверхні.

#### ***Формули для пікової потужності і пікової щільності потужності.***

Формули описують поведінку теоретичного плоского або ідеально гаусівського лазерного променя. У цьому випадку вони є апроксимацією значень, які можна було б отримати в реальних умовах. Крім того, існує кілька методів, які можна використовувати для вимірювання діаметра гаусового променя. Причина цього переважно пов'язана з тим, що його теоретичне значення досягає 0 тільки тоді, коли радіус досягає нескінченності. Отже, промінь матиме нескінченний діаметр. Тому ми вирішили використати метод, у якому він вимірюється за допомогою параметра  $1/e^2$ . У цей момент діаметр променя приблизно в 1699 рази перевищує повний діаметр, виміряний на половині максимуму функції Гауса. При  $1/e^2$  це приблизно 86,5% від загальної потужності. Зауважте, що для балки з плоскою вершиною, формули



використовуються без змін, але для балки Гауса, існує коефіцієнт 2, який множить праву частину цих рівнянь (див. рис. 2).

$$\text{Peak power density} \left( \frac{W}{cm^2} \right) = \frac{\text{Energy per pulse}(J)}{\text{Pulse width}(s) \times \text{Beam area}(cm^2)}$$

$$\text{Peak power density} \left( \frac{W}{cm^2} \right) = \frac{\text{Average power}(W)}{\text{Repetition rate}(Hz) \times \text{Pulse width}(s) \times \text{Beam area}(cm^2)}$$

$$\text{Peak power}(W) = \frac{\text{Energy per pulse}(J)}{\text{Pulse width}(s)}$$

$$\text{Peak power}(W) = \frac{\text{Average power}(W)}{\text{Repetition rate}(Hz) \times \text{Pulse width}(s)}$$

*Рисунок 2*

Отже, щоб знайти пікову щільність променя достатньо енергію імпульсу розділити на добуток ширини імпульсу та площі променя, або ж середню потужність розділити на добуток частоти повторення, ширини імпульсу та площу променя.

Для знаходження пікової щільності треба енергію імпульсу розділити на ширину імпульсу, або ж середню потужність розділити на добуток частоти повторення та ширини імпульсу (див. рис. 3).

<p>Пікова щільність потужності</p> $\text{Peak power density} \left( \frac{W}{cm^2} \right) = \frac{\text{Energy per pulse}(J)}{\text{Pulse width}(s) \times \text{Beam area}(cm^2)}$ <p>енергія імпульсу ширина імпульсу      площа променя</p>
<p>Пікова щільність потужності</p> $\text{Peak power density} \left( \frac{W}{cm^2} \right) = \frac{\text{Average power}(W)}{\text{Repetition rate}(Hz) \times \text{Pulse width}(s) \times \text{Beam area}(cm^2)}$ <p>середня потужність частота повторення      ширина імпульсу      площа променя</p>
<p>Пікова щільність</p> $\text{Peak power}(W) = \frac{\text{Energy per pulse}(J)}{\text{Pulse width}(s)}$ <p>енергія імпульсу ширина імпульсу</p>
<p>Пікова щільність</p> $\text{Peak power}(W) = \frac{\text{Average power}(W)}{\text{Repetition rate}(Hz) \times \text{Pulse width}(s)}$ <p>середня потужність частота повторення      ширина імпульсу</p>

Рисунок 3

Тобто, що стосується чисельних методів, на даний момент задача втрачає свою актуальність, оскільки є відомою та розглянутою іншими дослідниками, та є програмно забезпеченою у підрахунках.

На відмінно від чисельних методів у цій роботі ми досліджуємо якісний підхід, що до сьогодні не зустрічався у літературі.

### 2.3 Якісний аналіз рівняння лазерного пульсу.

В результаті розділу 2.2, які були присвячені чисельним методам аналізу рівняння лазерного пульсу. В цьому розділі ми займаємось аналітичними методами. Спочатку, отримаєм явний розв'язок мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу, а далі, за допомогою доведеного принципу максимуму, ми встановлюємо якісні властивості цього розв'язку.

Розглянемо мішану задачу для рівняння лазерного пульсу:

$$\Gamma(\varphi) = f(x, t), \text{ в області } Q, \quad (2.7)$$

$$\varphi_{t^{(k)}}(x, 0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3), x > 0, \quad (2.8)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi_{xx}(0, t) = 0, t > 0, \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \theta &= b(x, t), \text{ в області } Q, \\ \theta(x, 0) &= 0, x > 0, \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

$$\theta(x, 0) = 0, x > 0, \quad (2.11)$$

Припустимо, що  $b \in C^0(\bar{Q})$ . В роботі [10] показано, що задача (2.10), (2.11) має єдиний розв'язок вигляду:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{t_0} \int_0^t e\left(\frac{\mathcal{T}-t}{t_0}\right) b(x, \mathcal{T}) d\mathcal{T}; \quad (2.12)$$

Де  $\theta$ , таке що  $\theta \in C(\bar{Q})$ ,  $\theta_t \in C(\bar{Q})$ .

Якщо,

$$b(0; t) = 0, t \geq 0, \quad (2.13)$$

то  $\theta(x, t)$  задовільняє (2.2).

Продиференціюємо (2.12) та отримаємо:

$$\theta_t(x, t) = \frac{1}{t_0} b(x, t) - \frac{1}{(t_0)^2} \int_0^t e\left(\frac{\mathcal{T}-t}{t_0}\right) b(x, \mathcal{T}) d\mathcal{T}; \quad (2.14)$$

При  $b(x, 0) = 0, x \geq 0$ , функція  $\theta(x, t)$  задовільняє умову  $\theta(x, 0) = 0, x \geq 0$ .

Припустимо, що  $\varphi \in C^2(\bar{Q})$  є розв'язком задачі (2.7)–(2.9). Тут

$$b(x, t) = \varphi_{xx}(x, t) - \varphi_{tt}(x, t) \quad (2.15)$$

За умов (2.14) – (2.15), функція (2.13) є розв'язком задачі (2.1) – (2.5).

І навпаки, якщо пара  $(\varphi, \theta)$  є розв'язком задачі (2.1) – (2.5) і  $\varphi \in C^2(\bar{Q}), \theta \in C^0(\bar{Q}), \theta_t \in C^0(\bar{Q})$ , тоді  $\varphi$  є розв'язком задачі (2.7) – (2.9), а  $\theta$  є розв'язком (2.10), (2.11), з  $b$  вигляду (2.15).

В роботі [10] був отриманий аналітичний розв'язок задачі (2.7) – (2.9) в просторі  $C^3(\bar{Q}) \cap H_4(E)$ , де  $E$  є будь-якою обмеженою підобластю  $Q$ .

Простір  $H_m(E)$  ( $m \geq 1$ , у нас випадок  $m = 4$ ) є гільбертовим простором з нормою (див. [10]).

$$\|u\|_m^2 = \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq m} \int \int_E \left| \frac{\partial^{\alpha + \beta} u}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \right|^2 dx dt. \quad (2.16)$$

Будемо вважати, що на функцію  $f(x, t)$  виконані наступні умови:  $f(x, t)$  неперервна в  $\bar{Q}$  і похідні  $f_t(x, t), f_{xt}(x, t)$  неперервні в  $\bar{Q}$ .

Розглянемо мішану задачу для рівняння лазерного пульсу в прямокутнику:

$R_{a,T}(a > 0, T > 0) = \{0 < x < a, 0 < t < T\}$ . В статті [10] було доведено, що аналітичний розв'язок  $u(x, t)$  мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу (2.1) з оператором  $\Gamma$ .

$$\Gamma u = f(x, t) \text{ в } R_{a,T}, \quad (2.17)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(a, t) = u_{xx}(a, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (2.18)$$

$$u_{t^{(k)}}(x, 0) = 0, (k = 0, 1, 2, 3), 0 \leq x \leq a. \quad (2.19)$$

Покладемо  $\lambda_j = j\pi a^{-1}, j = 1, 2 \dots 3$  (2.17):

$$\int_0^a (\Gamma u) \sin \lambda_j x dx = \int_0^a f(x, t) \sin \lambda_j x dx. \quad (2.20)$$

Нехай

$$u^j(t) = \int_0^a u(x, t) \sin \lambda_j x dx, \quad f^j(t) = \int_0^a f(x, t) \sin \lambda_j x dx. \quad (2.21)$$

З (2.20) маємо:

$$t_0 u_{t^{(4)}}^j + u_{t^{(3)}}^j + (1 + t_0 + \varepsilon t^0) \lambda_j^2 u_{t^{(2)}}^j + (1 + \varepsilon) \lambda_j^2 u_t^j + \lambda_j^4 u^j = f^j. \quad (2.22)$$

І також з (2.19):

$$u_{t^{(k)}}^j(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (2.23)$$

З використанням допоміжного розв'язку (2.21) можна встановити, що аналітичний розв'язок мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу (2.17)-(2.19) має вигляд: (цей результат було отримано в роботі [10]).

$$u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{j=1}^{\infty} u^j(t) \sin \lambda_j x \quad \left( \lambda_j = j \frac{\pi}{a} \right). \quad (2.24)$$

Причому, ряд в правій частині формули (2.24) збігається та визначає функцію з класу  $C^3(R_{a,T}) \cap H_4(E)$ , де  $E$  – деяка підмножина прямокутника  $R_{a,T}$ .

Знайдемо розв'язок задачі (2.22) – (2.23), після цього, підставимо його в (2.24) та отримаємо повну аналітичну форму розв'язку мішаної задачі (2.17) – (2.19) на відміну від роботи [10].

Рівняння (2.22) – лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння 4 порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок має вигляд:

$$u^j(t) = u_{3.0.}^j(t) + u_{ч.н.}^j(t) \quad (2.25)$$

$u_{3.0.}^j(t)$  – загальний розв'язок однорідного рівняння:

(2.22) = 0. Таке як (2.22), але замість  $f^j = 0$ , в правій частині треба поставити 0.

$$u_{3.0.}^j = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t}, \quad (2.26)$$

де  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  – дійсні та різні корені характеристичного рівняння:

$$t_0 \mu_4 + \mu_3 + (1 + t_0 + \varepsilon t^0) \mu_2 + (1 + \varepsilon) \lambda_j^2 \mu_1 + \lambda_j^4 = 0.$$

Тоді

$$u^j(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t} + \int_0^t k(s, t) f_j(s) ds$$

Коефіцієнти  $c_1, c_2, c_3, c_4$  (2.26) однозначно знаходяться з умов Коші (2.23).

Підставимо формули (2.21) і (2.26) в (2.24), отримаємо:

$$u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t} + \int_0^t k(s, t) \int_0^a f(x, s) \sin \lambda_j x dx ds \right\} \sin \lambda_j x \quad (2.27)$$

Таким чином, отримано:

### Теорема 2.1

Нехай  $f(x, t) \in C(R)$ . Тоді розв'язок мішаної задачі (2.17 – 2.19) існує, єдиний, належить простору  $C^3(R_{a,\tau})$  та може бути поданий за допомогою формули (2.27).

З теореми 2.1, а також принципу максимуму для гіперболічних рівнянь четвертого порядку, слідує також наступна теорема:

### Теорема 2.2

Нехай  $f(x, t) \geq 0$  в прямокутнику  $R_{a,\tau}$

Тоді в кожній внутрішній точці  $(x_0, t_0) \in E$ , деякої підмножини прямокутника  $R_{a,\tau}$ ,  $u(x_0, t_0) \leq 0$ .

Теорема 2.2 є аналогом принципу максимуму і слідує з формули аналітичного розв'язку мішаної задачі (2.17) – (2.19) вигляду (2.27).

## РОЗДІЛ 3

### ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЛЬСУ

Термопружність - це дослідження пружного тіла або матеріалу, під впливом нерівномірні зміни її температурного поля. Іншими словами: узагальнена термопружність — теорія взаємодії між термомеханічним навантаженням і тілом, до якого воно прикладене, в якій термопружне збурення поширюється у вигляді хвилі зі скінченною швидкістю.

Стискаючи або розширюючи елементи тіла, при деформації бачимо зміни внутрішні напруги, та температури які безпосередньо пов'язані з результуючою деформацією. Таким чином, елемент відчуватиме підвищення температури в стані стиснення і зниження температури та в стані розширення, хоча й дуже невелике. Ці зміни температури не розглядаються в теорії пружності і залишаються для формулювань, отриманих в теорії термопружності.

Класична термопружність розвинула свої теорії на основі узагальнення теорії теплопровідності твердого тіла та теорії пружності. Класичні теорії термопружності виявилися дуже ефективними в аналізі та вирішенні багатьох практичних проблем. Термомеханічне навантаження на тіло викликає термопружні реакції, такі як переміщення, тепловий потік, напруга та зміна температури.

У класичній термопружності фундаментальна система рівнянь поля включає, як одне з рівнянь, класичний закон теплопровідності Фур'є, а у зв'язку з рівняннями поля переміщення-температури має гіперболічно-параболічний тип.

Проте класичні теорії також були оскаржені як неточні, особливо в програмах, які включають раптове нагрівання, дуже короткі проміжки часу, високі теплові потоки та низькі температури ( $\sim 1\text{K}$ ). Чисельні методи розв'язання класичних математичних моделей були сформульована в працях R.D. Mindlin [26] і досліджена в роботах W. Nowacki [28]. Чисельні методи

роботи мають свої недоліки, тому мета даної роботи розглянути саме якісні методи. Робота R.D. Mindlin [26], W. Nowacki [28] має один суттєвий недолік – швидкість поширення тепла в піроелектричному матеріалі (електричний сепаратор, в якому вихідний матеріал розділяється на компоненти за їхньою піроелектричною електризацією в електростатичному полі, принцип дії піроелектричної сепарації базується на тому, що деякі кристалічні мінерали при нагріві і різкому охолодженні електризуються) вважається нескінченною. При вивченні теплообміну головний інтерес викликає швидкість теплообміну. Вивчаючи теплообмін, величина, яка називається тепловим потоком ( $q$ ), визначається як кількість теплопередачі на одиницю площі за одиницю часу і легко визначається із закону, що зв'язує тепловий потік та температурний градієнт. Це зазвичай називають законом Фур'є, з аналітичної роботи в теорія тепла.

Теорія далі розширена до кондуктивного теплообміну, який визначає спосіб теплопередачі, коли обмін енергією відбувається з області високої температури в область низьких температур за рахунок кінетичного руху або прямого впливу молекул або електронів. У цьому режимі закон Фур'є розширюється для врахування співвідношення між градієнтом температури (теплопровідність) і швидкістю зміни температури в часі. Саме ці теорії теплопередачі використовуються як фундаментальна основа з формулюваннями з теорії пружності, які встановлюють моделі, що використовуються в класичній лінійній термомеханіці.

Оскільки класичні формулювання призводять до параболічного рівняння теплопровідності, припускаючи нескінченну швидкість тепла (відповідь класичного термомеханічного тіла на термомеханічне навантаження поширюється з нескінченною швидкістю). Зрозуміло, що таке припущення йде в розрив з законами фізики то для вирішення цього нереалістичного результату було проведено багато досліджень (аналітичних та емпіричних), тому розвинулися так звані узагальнені моделі, що той чи інший спосіб нейтралізують цей недолік класичної моделі.



Метою цих досліджень було розвинути узагальнення класичної теорії термопружності, яке б ефективно прогнозувати кінцеві швидкості хвиль термопружного відгуку, а також усунення недоліків класичної термопружності. Починаючи з 1967 р. було розроблено ряд теорій, які в сукупності отримали назву узагальнених теорій термопружності.

Це наступний крок у навчанні опублікований R. В. Hetnarski та J. Ignaczak [11], які досліджували узагальнені теорії на жорстке термопружне тіло в напівпросторі під впливом плоского джерела тепла і короткого лазерного пульсу.

Green, A.E., Lindsay, K.A. [14], запропонували свою модифікацію моделі термопружності, яка передбачає введення додаткових параметрів «часу релаксації» (період часу, за який збурення у виведеній із рівноваги фізичній системі зменшується в  $e$  разів) і робить гіперболічним рівняння теплопровідності.

Представляємо та коротко описуємо методи та інструменти, які використовуються для досягнення рішення. Ці інструменти включають використання функції Green, A.E., Lindsay, K.A. [14], та теореми про розкладання.

### 3.1. Імпульсні лазери.

Розглянемо також імпульсні лазери, їх види, застосування, а також труднощі, що виникають при їх роботі. На відміну від лазерів, що працюють у режимі безперервної хвилі, у яких часовий профіль вихідної потужності є постійним у часі, лазери, що працюють в імпульсному режимі, мають перехідний часовий профіль вихідної потужності з часом. Імпульсні лазери зазвичай досягають набагато більшої пікової потужності, ніж інші лазери, стискаючи енергію імпульсу до невеликої тривалості. Наприклад, імпульсні твердотільні лазери можуть досягати імпульсної пікової вихідної потужності до 1012 Вт протягом 10-13 секунд.

Імпульсні лазери - це лазери, які випромінюють світло не в безперервному режимі, а у вигляді оптичних імпульсів (світлових спалахів).

Цей термін найчастіше використовується для лазерів, які зазвичай випромінюють наносекундні імпульси, але розглянемо ширший спектр лазерів, що генерують імпульси. Залежно від необхідної тривалості імпульсу, енергії імпульсу, частоти повторення імпульсу та довжини хвилі використовуються дуже різні методи генерації імпульсів і дуже різні типи імпульсних лазерів. Тут більш детально описані деякі типи імпульсних лазерів:

#### *Різні типи лазерів*

Різні типи лазерів з активною або пасивною модуляцією добротності випромінюють імпульси в наносекундному режимі тривалості; Особливо компактні мікрочіп-лазери також можуть генерувати субнаносекундні імпульси. Більшість лазерів — це твердотільні об'ємні лазери, і деякі з них можуть досягати високих імпульсних енергій у міліджоулях або навіть у кілоджоулях.

Ексімерні лазери використовуються для генерації інтенсивних наносекундних імпульсів в ультрафіолетовій області спектру. Вони накачуються досить короткими електричними імпульсами.

Деякі інші газові лазери (наприклад, азотні лазери) і лазери на парах металів (наприклад, лазери на парах міді) також керуються імпульсами струму і зазвичай не можуть працювати в режимі безперервної хвилі [33].

Ультракороткі імпульси з тривалістю в пікосекундній області зазвичай генеруються лазерами з синхронізованим режимом, якими можуть бути твердотільні об'ємні лазери, волоконні лазери або напівпровідникові лазери. Енергія їх імпульсу, як правило, досить мала, а частота повторення імпульсів зазвичай знаходиться в районі мегагерц або гігагерц. Для вищих енергій імпульсів (приблизно на порядок більше) можна використовувати лазер із резонаторним скиданням.

Напівпровідникові лазери з перемиканням посилення придатні для наносекундних або пікосекундних імпульсів із відносно низькою енергією ( $\rightarrow$  пікосекундні діодні лазери) [32].

Відносно довгі імпульси можуть генеруватися, наприклад, з лазерними діодами в режимі квазібезперервної хвилі, тож виникають труднощі з безперервною роботою. Деякі типи лазерів навряд чи можуть працювати в режимі безперервної хвилі, а лише в імпульсному режимі, які можуть мати різні причини:

У деяких випадках можна отримати досить високий лазерний підсилення лише з інтенсивністю накачки, яка практична лише для імпульсної накачки. Наприклад, необхідна інтенсивність накачування призведе до перегріву підсилювального середовища при застосуванні протягом тривалого часу.

У деяких випадках ми маємо справу з лазерними переходами, що обриваються.

З цих причин інколи використовують імпульсний лазер із високою частотою повторення імпульсів, де робота безперервної хвилі була б цілком придатною для застосування, але важко реалізувати з типом лазера. Прикладом може служити фотолітографія з ексимерними лазерами.

Також виникають труднощі з великою тривалістю пульсу. Незважаючи на те, що для багатьох лазерних застосувань дуже коротка тривалість імпульсу, є кілька випадків, коли бажані досить довгі імпульси. Наприклад, довгі імпульси дозволяють отримати дуже малу ширину оптичної лінії та можуть уникнути пошкодження, спричиненого лазером, завдяки меншій піковій потужності.

Однак часто досить важко створювати відносно довгі лазерні імпульси – наприклад, тривалістю кілька мікросекунд – принаймні, коли одночасно потрібна висока енергія імпульсу. Метод перемикання добротності може бути оптимізований для великої тривалості імпульсу, але з обмеженнями; наприклад, непрактично використовувати дуже довгий лазерний резонатор, щоб максимізувати час проходження резонатора туди й назад. Інший підхід полягає в роботі з досить низьким посиленням, але це передбачає високу чутливість до внутрішньо резонаторних втрат.

#### ***Двоімпульсний, повторюваний і пакетний режими.***

Деякі імпульсні лазери працюють в одноімпульсному режимі, де кожен імпульс може вільно запускатися, коли цього вимагає програма. У цьому режимі часто досягається досить висока енергія імпульсу, але лише досить обмежена частота повторення імпульсів. Він підходить, наприклад, для твердотільних лазерів з ламповою накачкою.

Деякі лазери випромінюють імпульси з постійною частотою повторення імпульсів. У випадку лазерів з модуляцією добротності це часто становить від 10 Гц до 100 кГц, тоді як лазери з синхронізованим режимом випромінюють із дуже високою частотою повторення, як правило, десятки або сотні мегагерц, тощо. Енергія на імпульс відповідно низька.

Частоту повторення імпульсів можна зменшити на якийсь, можливо, значний коефіцієнт за допомогою вибору пульсу.

Для деяких застосувань вигідно використовувати пакети (пучки) імпульсів, або режим серійної зйомки. Це означає, що деяка кількість імпульсів випромінюється з близьким часовим інтервалом (наприклад, пару

наносекунд), утворюючи сплеск, і наступний сплеск може відбутися лише через набагато довший час.

Багато типів лазерів не підходять для такого режиму роботи або потребують значних додаткових технічних зусиль.

Для газових лазерів інверсія населеності зазвичай досягається шляхом подачі напруги на скляну або керамічну трубку, яка містить середовище посилення, яке є або газом низького тиску, або газовою сумішшю. Напруга створює електричне поле всередині трубки, яке індукуює електричний струм. Ці електрони стикаються з атомами газу, тим самим збуджуючи їх до вищих енергетичних рівнів, які слугуватимуть верхнім лазерним рівнем. Нижній лазерний рівень зазвичай розпадається до основного стану набагато швидше, ніж верхній рівень, створюючи таким чином інверсію населеності між ними. Оскільки випромінювальні речовини дуже розріджені, результуючі лазерні переходи мають дуже вузьку спектральну смугу та працюють на чітко визначених довжинах хвиль. Завдяки широкому розмаїттю газоподібних середовищ діапазон робочих довжин хвиль може варіюватися від ультрафіолетового випромінювання для ексимерних лазерів, через видимий діапазон для аргонних іонних та деяких інших лазерів. Газові лазери історично використовувалися в широкому спектрі застосувань, але вони були ефективними

### *Характеристики лазерного світла*

Процес когерентного підсилення наділяє лазерне світло унікальним набором характеристик. Як правило, лише одна або підмножина цих характеристик є найбільш критичною для конкретного застосування, тому кожна буде описана окремо; однак багато з цих характеристик взаємопов'язані. Хоча вони не є вичерпними, найпоширеніші вихідні характеристики лазера включають: довжину хвилі, смугу посилення, монохроматичність, просторові та часові профілі, колімацію, вихідну потужність, когерентність і поляризацію.

### *Довжина хвилі*

Велика частина спектра електромагнітного випромінювання покривається широким спектром існуючих лазерів. Діапазон довжин хвиль поширюється від ультрафіолетового до середнього інфрачервоного і не враховує інші більш екзотичні системи, які забезпечують доступ від спектральної області м'якого рентгенівського випромінювання ( $< 10$  нм) до далекої інфрачервоної ( $> 100$  мкм). Довжина хвилі генерації визначається середовищем посилення лазера, що забезпечує оптичний перехід. Широкий діапазон можливих довжин хвиль пояснюється великою різноманітністю доступних середовищ посилення. Крім того, майже всі довжини хвиль лазера можуть бути перетворені або зміщені на альтернативну довжину хвилі і, таким чином, можуть досягати діапазону від ультрафіолетового до світлодіодного діапазону. Ця спектральна гнучкість є причиною того, що лазерні системи можна використовувати для короткохвильових застосувань, таких як літографія для обробки напівпровідників, і довгохвильових застосувань, таких як обробка матеріалів і молекулярна спектроскопія.

### *Збільшена пропускна здатність*

Смуга пропускання середовища лазерного посилення визначає діапазон довжин хвиль, у якому може відбуватися посилення. Ця смуга пропускання визначається головним чином смугою пропускання, на якій відбувається спонтанне випромінювання. У той час як різні процеси сприяють розширенню ширини лінії переходу, кілька електронних переходів (на які також впливають обертальні та вібраційні рухи) можуть перекриватися за частотою, що призводить до значно ширших смуг, особливо для молекулярних або твердотільних систем.

Газові лазери, зазвичай мають дуже вузьку смугу частот порядку 1 ГГц через їхні атомні переходи. І навпаки, твердотільні лазери, можуть мати надзвичайно широку смугу пропускання, що перевищує 100 ТГц. Ширина смуги підсилення також визначається загальними втратами в системі. Отже, фактична смуга посилення може відрізнитися від смуги спонтанного

випромінювання. Наприклад, модуляція внутрішньо резонаторних втрат є засобом для досягнення налаштування довжини хвилі. Крім того, смуга пропускання посилення не обов'язково збігається з смугою пропускання вихідного лазерного променя, оскільки це також буде залежати від лазерного резонатора. Лазерні коливання можуть виникати лише на частотах, для яких коефіцієнт підсилення більший за коефіцієнт втрат.

Отже, ми можемо сказати, що імпульсні лазери зазвичай досягають набагато більшої пікової потужності, ніж інші лазери, стискаючи енергію імпульсу до невеликої тривалості, тому їх використання залишається актуальним до сьогодні.

### 3.2. Розрахунок енергії пульсу

У кількох медичних і хірургічних застосуваннях імпульсні лазери використовуються для лікування та розрізання багатьох типів тканин тіла.

Щоб уникнути постійного пошкодження свого тіла (енергія пульсу вища за необхідну) і, з іншого боку, уникнути неповного або неправильного лікування (енергія пульсу нижча за необхідну), необхідно обов'язково вимірювати енергію пульсу, щоб переконатися, що вона стабільний навколо бажаного солодкого місця. Це забезпечить безпеку та ефективність під час лікування.

Якщо ви намагаєтеся обчислити кількість енергії, яка міститься у ваших лазерних імпульсах, ви або працюєте з імпульсним лазером і хочете знати енергію в кожному окремому імпульсі, або з неперервним або імпульсним лазером, який запускається протягом відомого часу, і також кінцеву кількість часу.

Для імпульсного лазера вам потрібно буде розділити середню потужність вашого джерела на його частоту повторення. Специфікації лазерів зазвичай містять ці два параметри, але для більшої точності їх також можна виміряти відповідними інструментами.

Тепер давайте введемо деякі реальні значення та припустимо, що ви працюєте з лазером, який має фіксовану вихідну потужність 200 Вт і частоту повторення, яку можна налаштувати від 20 Гц до 1 кГц. Якщо встановити регулятор на 20 Гц, ми матимемо  $200 \text{ Вт} / 20 \text{ Гц} = 10 \text{ Дж}$  на імпульс.

Щоб забезпечити постійну вихідну потужність 200 Вт із 20 імпульсами, що виробляються щосекунди, кожен із ваших імпульсів має містити 10 Дж енергії.

Якщо встановити контроль на 1 кГц (1000 імпульсів кожену секунду), то ми маємо  $200 \text{ Вт} / 1000 \text{ Гц} = 0,2 \text{ Дж} = 200 \text{ мДж}$  в кожному імпульсі. Для фіксованої середньої потужності, чим вище частота повторення, тим менша енергія на імпульс.



Для безперервного або імпульсного лазера, який працює протягом відомого та кінцевого проміжку часу, вам потрібно буде помножити середню потужність вашого джерела на цей час, який часто називають «тривалістю імпульсу».

Як згадувалося раніше, виробники зазвичай надають деяку детальну інформацію щодо цих частин інформації у своїх специфікаціях. Тоді ви можете обчислити те, що вам потрібно, не виконуючи жодних вимірювань. Однак, як і раніше, ви регулярно самостійно проводите вимірювання, щоб переконатися, що все працює належним чином.

### ***Фізика та лазерний імпульс***

Також варто додати, що однією зі сфер де застосовується лазерний імпульс є створення нових частинок шляхом взаємодії ультра релятивістських іонів, з Великого Адронного колайдери і аттосекундний лазерний імпульс. Вони відкривають нові можливості для лазерних фізиків.

Представлено нове аналітичне рішення рівняння руху релятивістських електронів у фокусі. Лазерний імпульс високої інтенсивності. Апроксимуємо поперечну динаміку електрона в усередненому полі довгого лазерного імпульсу, сфокусованого на поперечний профіль Гауса. Результуюче розсіювання виявлено верхню межу кутів розсіювання електронів залежно від лазера параметри та початковий стан руху електронів. Зокрема, ми демонструємо кути в яке електрони розсіюються лазерним масштабом як просте співвідношення їхньої початкової енергії з амплітудою лазера. Ми виявили, що слід розрізняти два режими, в яких або фокусування лазера, або пік потужність є основними рушійними силами розсіювання. На основі цього результату бачимо, як інтенсивність лазерного імпульсу можна визначити за кільцевою картиною в просторовому розподілі а промінь електронів високої енергії, розсіяний від лазера. Аналіз було підтверджено за допомогою детального моделювання релятивістських тестових частинок усередненої пондеромоторної динаміки електронів у повному обсязі електромагнітні поля сфокусованого лазерного імпульсу.

Останні технологічні досягнення в надінтенсивних лазерних системах полегшують дослідження динаміки частинок електромагнітні поля безпрецедентної сили [38]. Зокрема, динаміка електронів у таких надсильних полях була областю інтенсивних досліджень протягом останніх десятиліть [22]. Однак виявилось, що за винятком специфічних, дуже симетричних випадків, таких як плоскі хвилі [18], повна динаміка електронів не може бути вирішена в закритих аналітичних виразах. На відміну від цих аналітичних завдань, з іншого боку, повністю плоский лазер, хвилі неможливо реалізувати експериментально, але лазер завжди має кінцевий розмір, накладаючи поперечні коливання. Протягом тривалої взаємодії подальші застосування, які, як передбачається, сприятимуть детальному розумінню динаміки електронів в реалістичних лазерних полях є надійними метрологічними схемами для лазерного поля. Зокрема, в рамках теми фізики ультраінтенсивного лазера пряме визначення пікової інтенсивності на сьогоднішній день є невирішеною проблемою.

### 3.3. Історія технології лазерного різання

Наукові експерти відносять початок лазерної технології до роботи Альберта Ейнштейна. На початку 20-го століття Ейнштейн вивчав світло, намагаючись з'ясувати, чи складається це явище з окремих «енергетичних пакетів». Ця гіпотеза виникла завдяки фізику Максу Планку, який у 1800-х роках припустив, що світло складається з крихітних квантів, які формують те, що люди бачать як безперервний промінь.

Ейнштейн довів гіпотезу Планка, яка стала основою лазерної технології.

Проте вченим знадобилося більше 40 років після досягнення Ейнштейна, щоб знайти практичне застосування цих знань. Фізик Чарльз Таунс відкрив стимульоване випромінювання, процес, у якому лазерно-активне середовище короткочасно накопичує енергію за допомогою опромінення світлом. Технологія може посилити цю накопичену енергію за допомогою лазерного променя.

#### *Як мікрохвильова технологія привела до лазерів*

Шлях Тауна до винаходу лазерних променів почався з його експериментів з мікрохвильовими печами наприкінці 1940-х років. Це призвело до створення пристрою, здатного генерувати та підсилювати мікрохвилі, що називається «посилення мікрохвиль за допомогою стимульованого випромінювання випромінювання», відоме під аббревіатурою MASTER. Цей прогрес призвів до іншої теорії: те, що MASTER зробив для мікрохвиль, також застосовувалося до інфрачервоного та звичайного світла.

Демонстрація точності цієї теорії призвела до винаходу нового пристрою, який генерував «посилення світла шляхом стимульованого випромінювання випромінювання», або лазерного променя. Теодор Мейман розробив цю технологію в 1960 році, яка складалася з компонентів, які формували «доступні», або матеріали, необхідні для створення лазера: лампа-спалах, рубін, легований хромом, і металева гільза.

Багато хто не зміг зрозуміти потенціал лазерів у той час, і Майман насилу знайшов журнал, який бажав би опублікувати результати його роботи. На жаль, редактори вважали це надто незначним, щоб приділяти йому місце у своїх публікаціях.

Однак у міру того, як лазери стали більш відомими, наукові та промислові спільноти повільно побачили важливість технології та її потенціал для комерційного застосування.

### *Як еволюціонували лазери з 1960-х років*

Щойно інформація про лазери поширилася, а їхні практичні можливості стали загальнозрозумілими, розробка цих геніальних пристроїв пішла стрімко. Наприклад, рубінові лазери стали надбанням офтальмологічної галузі в Америці ще в 1961 році. Крім того, галузь охорони здоров'я побачила шлях до менш інвазивної хірургії та розпочала роботу над технологією лазерної хірургії.

У 1962 році вчений Кумар Патель створив першу лазерну систему CO<sub>2</sub>. Це нововведення дозволило отримати набагато більшу потужність лазерного променя. Завдяки підвищеній здатності різати ці лазери стали переважати в промислових цілях. CO<sub>2</sub>-лазери зробили можливим різання, свердління, маркування та зварювання металу за допомогою лазерів. Через понад 60 років після винаходу CO<sub>2</sub>-лазери залишаються основою багатьох виробничих процесів.

1960-ті роки також принесли промисловість лазерів на барвниках. Лазери на барвниках дозволяють операторам вибирати кольори на основі довжини хвилі лазерного світла. Вони часто використовуються в спектроскопії.

1980-ті роки стали переломним часом у розвитку лазерної технології з винаходом напівпровідникового лазера. Напівпровідникові лазери використовують фотоніку, лазерні діоди та передачу через скловолокно, щоб полегшити масове виробництво та забезпечити блискавичну швидкість передачі даних в Інтернеті.

Наприкінці 1990-х років розробники випустили технологію, здатну виробляти лазерні діоди, розмір яких менший за довжину хвилі світла, яке вони генерують. Ця здатність проклала шлях для нанолазерів, які відіграють ключову роль в обробці даних, медицині та передачі оптичного сигналу.

### *Сучасні лазери*

Новітня технологія лазерного променя пропонує цінні можливості для галузі медицини. Наприклад, вони застосовуються для видалення пухлинної тканини за допомогою індукованої лазером термотерапії та мають хірургічні функції для відшарування сітківки та лікування варикозного розширення вен. Косметична хірургія також отримала користь від можливостей лазера. Вони можуть видалити небажані татуювання та зупинити ріст волосся на тілі за допомогою епіляції.

Лазери також допомагають на будівельних майданчиках, створюючи спрямований промінь для будівництва тунелю. Ця здатність забезпечує надзвичайно точне копання та прокладання тунелів.

Лазери — це універсальна та високопродуктивна технологія, яка покращує процеси в різних галузях промисловості. Спираючись на теорії та експерименти Макса Планка та Альберта Ейнштейна, вони просунулися в повсякденне застосування в охороні здоров'я та виробництві. Вони створюють найдосконаліші хірургічні та промислові методи.

### *Послуги лазерного різання на виробництві*

У Prototech Laser у Честерфілді, штат Мічиган, основою широкого списку можливостей є промислове лазерне різання. Вони мають одну з найбільших промислових потужностей лазерного різання на Середньому Заході з понад 10 лазерами. Залишаючись на передньому краю технологій, вони пропонують вигідні рішення для виробничих процесів від малих до великих обсягів з невеликою кількістю або без інструментів. Повний спектр послуг з лазерного різання та виготовлення металу відповідає особливим вимогам оборонного, автомобільного та промислового секторів.

### *Історія лазера*

Лазер або повна назва — підсилення світла шляхом вимушеного випромінювання, пройшов довгий шлях з часу свого розвитку в 1960-х роках. Сьогодні лазерна технологія всюдишуца в нашому сучасному світі з використанням у медицині, телекомунікаціях і навіть системах зброї.

Макс Планк у 1900 році зробив висновок про взаємозв'язок між енергією та частотою випромінювання. Він був першим, хто припустив, що енергія може випромінюватися або поглинатися окремими порціями або квантами.

Хоча теорія Планка була новаторською сама по собі, вона мала один дуже важливий ефект. Прозріння Планка надихнуло одного з найвпливовіших учених нашого часу – Альберта Ейнштейна.

Ейнштейн спирався на теорію Планка, щоб опублікувати свою статтю про фотоелектричний ефект. Він припустив, що світло також доставляє енергію порціями, або дискретними квантовими частинками, званими фотонами.

### *Винахід голографії*

Дослідження голографії зупинилися до розробки лазерів у 1960-х роках. Це частково стимулювало б подальший розвиток обох технологій.

Голографія - це спосіб створення унікального фотографічного зображення без використання об'єктива. Голограми складаються з серії нерозпізнаних смуг і завитків, які під час освітлення когерентним джерелом світла, як лазер, стають тривимірним зображенням оригінального зображення або об'єкта.

У 1948 році Денніс Габор, розробляє голограми за допомогою електронного променя і як вчений угорського походження, отримав Нобелівську премію з фізики за свій винахід у 1971 році. Він намагався покращити роздільну здатність електронних мікроскопів, створюючи голограми за допомогою електронного променя, а потім досліджуючи їх у когерентному світлі.

На момент відкриття він мав незначне практичне використання, аж до розробки лазерів у 1960-х роках. Це раптово призвело б до вибуху використання голограм у Сполучених Штатах.

Сьогодні цей вибух призвів до величезної індустрії, яка включає музейні експозиції, медичні програми та ефективність сонячних панелей.

### ***Введено термін лазер***

Аспірант Колумбійського університету, Гордон Гулд, у 1957 році, записує у своєму блокноті перше зареєстроване використання терміна лазер. Він також записав свої ідеї щодо фактичного будівництва одного з них і має передбачливість завірити його нотаріально в місцевому магазині в Бронксі.

Незабаром після того, як він залишив університет, він приєднався до приватної дослідницької компанії TRG (Technical Research Group).

У записнику Гордона Гулда вперше було використано абревіатуру «Лазер», але також було зазначено деякі базові концепції його створення. Цей ноутбук стане центром 30-річної судової боротьби за патентні права на технологію.

Гулд обговорив свої ідеї з фізиком Чарльзом Таунсом, який порадив йому записати свої думки та завірити їх нотаріально, що він і зробив. Гулд був під враженням, що він повинен мати робочу модель до того, як подати заявку на патент, і його випередили Таунс і фізик Артур Шавлоу, які подали подібну заявку, тобто його остаточну заявку було відхилено.

Таунс і Шавлоу отримали патент США № 2 929 922 у березні 1960 року, коли вони працювали в Bell Labs над своїм "Optical MASER". Гулд нарешті виграв свою справу в 1977 році, щоб отримати перший патент на лазер.

### ***Майбутнє лазерних технологій***

По-перше, використання потужних лазерів може зробити можливим інерційний термоядерний синтез у майбутньому. Це тип дослідження ядерного синтезу, який намагається ініціювати реакцію синтезу шляхом нагрівання та стиснення джерела палива. Зазвичай це гранули дейтерію та тритію.

Ідея полягає в тому, щоб стиснути та нагріти гранулу, спрямувавши енергію на зовнішній шар мішені. Більшість досліджень з цього приводу на сьогодні пов'язано з використанням потужних лазерів.

Потім нагрітий зовнішній шар вибухає назовні, створюючи силу реакції проти решти мішені, прискорюючи її всередину, стискаючи мішень. Цей процес генерує ударні хвилі, які рухаються всередину через цільову гранулу.

Якщо ці хвилі можна зробити достатньо потужними, вони ще більше стискатимуть і нагріватимуть паливо в центрі до такої міри, що стане можливим ядерний синтез.

По-друге, твердотільний теплоємний лазер зараз розробляються в Ліверморській національній лабораторії імені Лоуренса. Планується вдосконалити цю технологію для отримання середньої вихідної потужності 100 кВт або більше.

Цей тип лазера є твердотільною установкою з діодним накачуванням, розробленою для потенційної військової зброї.

«Потенційні військові застосування такої системи включають націлювання та знищення ракет малої дальності, керованих ракет, артилерійського та мінометного вогню, безпілотних літальних апаратів і саморобних вибухових пристроїв». - Ліверморська національна лабораторія імені Лоуренса.

У 2006 році лабораторія змогла виробити 67 кіловат потужності, що на 50% більше світового рекорду рівня потужності, досягнутого попереднього року. Це було досягнуто за допомогою п'яти керамічних пластин з ітрієвим алюмінієвим гранатом із лазерним підсиленням, легуваних неодимом.

Найкраще бачення — це твердотільний лазер із електричним приводом, який можна розгорнути на гібридному електромобілі.

По-третє, у 2017 році, експерименти показали, що використання інфрачервоних лазерних імпульсів, спрямованих у стільникову решітку з вольфраму та селену, може забезпечити дивовижну швидкість обчислень.



«У довгостроковій перспективі ми бачимо реалістичний шанс представити квантові інформаційні пристрої, які виконують операції швидше, ніж одне коливання світлової хвилі», — сказав у заяві провідний автор дослідження Руперт Хубер (професор фізики Регенсбурзького університету).



## ВИСНОВКИ

Отже, під час виконання кваліфікаційної роботи «Дослідження процесів пружності з врахуванням внутрішнього демпінгу, рівняння «Laser-pulse»» вивчено методи дослідження гіперболічних рівнянь четвертого порядку, та з їх допомогою, отримано такі результати:

1. Розв'язана допоміжна задача Коші для лінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами та неоднорідною неперервною правою частиною.

2. За допомогою розв'язку, отриманого в п.1, отриманий явний повний вигляд аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу в прямокутнику у вигляді ряду Фур'є.

3. Проведено якісний аналіз цього розв'язку та встановлено оцінки аналогу принципу максимуму для гіперболічних рівнянь четвертого порядку, показано на прикладі класичного розв'язку мішаної задачі для рівняння лазерного пульсу, що цей принцип виконується (раніше було доведено цей принцип лише в загальному формулюванні). Розкрита тема застосування лазера, його типи та властивості.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Andrieva Yu., Buryachenko K. Analog of maximum principle for the wave processes, Vol. 1 No. 1: Bulletin of Cherkasy University. Series "Physics and Mathematics", 2022, p. 69.
2. Burskii V.P., Buryachenko K.O. On the breakdown of the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for typeless differential equations of arbitrary even order in a disk. Journal of Mathematical Sciences, 190 (4), 2013, 539 – 566.
3. Burskii V.P., Methods of investigations of boundary value problems for general differential equations. Kiev: Naukova dumka, 2002, 316.
4. Buryachenko K.O. Maximum principle for the weak solutions of the Cauchy problem for the fourth-order hyperbolic equations. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics: Vinnytsia, 2023, 10.
5. Buryachenko, K. O. On the uniqueness of solutions of the Dirichlet problem in a disk for fourth-order differential equations in degenerated cases. Nonlinear Boundary Value Problems, 10, 2000, 44 – 49.
6. Buryachenko, K. O. Solvability of inhomogeneous boundary-value problems for fourth-order differential equations. Ukrainian Mathematical Journal, 63(8), (2012), 1165 – 1175.
7. Capsoni, A., & Vigano, G. M. On damping effects in Timoshenko beams. International Journal of Mechanical Sciences, 73, (2013), 27 – 39.
8. Fichera, G. A. boundary value problem connected with response of semi-space to a short laser pulse. Rend Math Acc Lincei, 8(3), (1997), 197 – 228.
9. Green A. E., Naghdi P. M. A reexamination of the basic postulates of thermomechanics. Proc. R. Soc. London 432, 1991, 171–94.
10. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid. J. Thermoelasticity half-space. Applications Math Mech (English Edition) 31, 2010, 1153–72.

11. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elast. heat source. Applications Math Mech (English Edition)* 34, 2013, 63–74.
12. Green A. E., Naghdi, P. M. On undamped heat waves in an elastic solid. *J. Therm. Stresses* 15, 1992, 253–264.
13. Green A. E., Naghdi, P. M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elast.* 31, 1993, 189–208.
14. Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity. *J. Elasticity* 2, 1972, 1–7.
15. Hector L. G., Hetnarski R. B., Thermal stress due to a laser pulse: Elastic solution., *Journal of Applied Mechanics*, 63(1), 1996, 38 – 46.
16. Hetnarski, R.B., Eslami, M.R. *Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications*. Springer Science, Berlin 2009, 560.
17. Hetnarskij R. B., Ignaczak J., Generalized thermoelasticity: response of semispace to a short laser pulse. *Journal of Thermal Stresses*, y. 17, 1994, 377 – 396.
18. Jean-Claude Diels, Wolfgang Rudolf, “*Ultrashort Laser Pulse Phenomena*”, Second Edition, Elsevier, 675, 2006, 456–464.
19. Joseph D. D., Preziosi L. Heat waves. *Rev. Mod. Phys.* 61, 1989, 41–73.
20. Joseph D. D., Preziosi L. Heat waves. *Rev. Mod. Phys.* 62, 1990, 375–91.
21. Kong De-Xing. Maximum principle in nonlinear hyperbolic systems and its applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 32(7), 1998, 871 – 880.
22. Lord H., Shulman Y. A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15, 1967, 299-309.
23. Mawhin, J., Ortega, R., & Robles-Perez, A. M. A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in space dimension three. *Comptes Rendus De l’Académie Des Sciences I*, 334, 2002, 1089 – 1094.
24. Mawhin, J., Ortega, R., and Robles-Perez, A. M. A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equations and applications to nonlinear

- forcing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 2000, 695 – 709.
25. Mawhin, J., Ortega, R., and Robles-Perez, A. M. Maximum principles for bounded solutions of the telegraph equation in space dimensions two and three and applications. *Journal of Differential Equations*, 208, 2005, 42 – 63.
  26. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals, problems of continuum. *Problems of Continuum Mechanics 70-th Birthday Volume*. N.I. Muskhelishvili, ed. – SIAM, Philadelphia, 1961, 282 – 290.
  27. Norwood F. R., Warren W. E. “Wave propagation in the generalized dynamical theory of thermoelasticity”, *Quart. Jnl. Neoh. and Appl. Math.*, 22, 1969, 283-290.
  28. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. Vol.1, 1978, 171 – 182.
  29. Ortega, R., and Robles-Perez, A. M. A maximum principle for periodic solutions of the telegraph equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 221, 1998, 625 – 651.
  30. Othman, M.I.A., Hasona, W.M., Eraki, E.E.M. Influence of gravity field and rotation on a generalized thermoelastic medium using a dual-phase-lag model. *J. Thermo Elast.* 1, 2013, 12–22.
  31. Othman, M.I.A., Hilal, M.I.M. Rotation and gravitational field effect on two-temperature thermoelastic material with voids and temperature dependent properties type III. *J. Mech. Sci. Technol.* 29, 2015, 3739–3746.
  32. Othman, M.I.A., Zidan, M.E.M., Hilal, M.I.M.: 2-D problem of a rotating thermo-elastic solid with voids under thermal loading due to laser pulse and initial stress type III. *J. Therm. Stress.* 38, 835–853 (2015).
  33. Othman M. I. A., Hasona, W. M., Abd-Elaziz E. M. The influence of thermal loading due to laser pulse on generalized micropolar thermoelastic solid with comparison of different theories. *Multidiscip. Model. Mater. Struct.* 10, 2014, 328–345.

34. Protter, M. H., and Weinberger, H. F. Maximum principle in differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 1984, 260.
35. Renz G., Analysis of the thermoelastic response of a semi-space to a short laser pulse laser pulse, 1997, 171.
36. Renz G., Rochester Institute of Technology RIT Scholar Works, "Analysis of the thermoelastic response of a semi-space to a short laser pulse", 4, 1997, 155.
37. Wang X., Xu X. Thermoelastic wave induced by pulsed laser heating. J. Therm. Stress. 25, 2002, 457–473.
38. Zenkour A.M., Abbas I.A. Thermal shock problem for a fiber-reinforced anisotropic half-space placed in a magnetic field via G–N model. Appl. Math. Comput. 246, 2014, 482–490.
39. Буряченко К.О., Шань М.О. Рівняння у частинних похідних. Лекції та завдання: навчальний посібник. Вінниця: ДонНУ, 2015, 144.

## ДЕКЛАРАЦІЯ

про дотримання академічної доброчесності

Я, Гронська Марія Ігорівна, здобувач вищої освіти ОПП «Прикладна математика» автор кваліфікаційної (магістерської) роботи на тему: «Дослідження процесів пружності з врахуванням внутрішнього демпінгу, рівняння «Laser-pulse»», що нижче підписалась, розуміючи та підтримуючи загально визнані засади справедливості, доброчесності та законності.

### **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЬ:**

дотримуватися принципів та правил академічної доброчесності, що визначені законодавством України, локальними нормативними актами Донецького національного університету імені Василя Стуса, положеннями, правилами, умовами, визначеними іншими суб'єктами, та не допускати їх порушення.

### **ПІДТВЕРДЖУЮ:**

що мені відомі положення статті 42 Закону України «Про освіту»;  
що у даній роботі не представляла/представляв чийсь роботи повністю або частково як свої власні. Там, де я скористалася/скористався працею інших, я зробила/зробив відповідні посилання на джерела інформації;

що дана робота не передавалась іншим особам і подається вперше, не порушує авторських та суміжних прав закріплених статтями 21-25 Закону України «Про авторське право та суміжні права», а дані та інформація не отримувались в недозволеній спосіб.

### **УСВІДОМЛЮЮ:**

що ця робота може бути перевірена університетом на плагіат або інші порушення академічної доброчесності, в тому числі з використанням спеціалізованих сервісів;

що у разі порушення академічної доброчесності, до мене можуть бути застосовані процедури, передбачені законодавством України та Кодексом академічної доброчесності та корпоративної етики Донецького національного університету імені Василя Стуса, іншими локальними нормативними актами університету, та я можу бути притягнута/притягнутий до академічної відповідальності.

---

(дата)

---

(підпис)